



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

DISEÑO DE UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LOGRAR
UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DEL CONCEPTO DE
ECUACIÓN, MODELANDO SITUACIONES PROBLEMA EN EL
GRADO NOVENO, POR MEDIO DE MÉTODOS GRÁFICOS

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Medellín, Colombia
2015

DISEÑO DE UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LOGRAR
UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DEL CONCEPTO DE
ECUACIÓN, MODELANDO SITUACIONES PROBLEMA EN EL
GRADO NOVENO, POR MEDIO DE MÉTODOS GRÁFICOS

TESIS PRESENTADA POR ADRIANA MILENA CASTAÑEDA URREGO
PARA OBTENER EL GRADO DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES

Director (a): MSc. Fernando Puerta Ortiz

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Medellín, Colombia
2015

Agradecimientos

Dedicado especialmente a Dios porque me dió sabiduría y perseverancia y me llevó a cumplir esta meta. A mi familia que estuvieron durante todo el proceso de lograr uno más de mis sueños, por sus esfuerzos, cariño y apoyo.

Al director del trabajo de grado Mg Fernando Puerta Ortiz por su orientación, paciencia, apoyo, dedicación y por ayudarme a culminar esta etapa de mi vida.

A los estudiantes de grado noveno y directivas de la Institución Educativa Marceliana Saldarriaga, por su apoyo, participación y creer en esta propuesta.

A todos los profesores y compañeros que con sus lecciones, conocimientos, contribuyeron a mi formación profesional.

Gracias a todas aquellas personas que siempre estuvieron para brindarme toda su ayuda, que influyeron con sus experiencias en formarnos para los retos de la vida, a cada uno de ellos les dedico este trabajo de grado.

Resumen

La comprensión del concepto de ecuación es fundamental para resolver situaciones problema de la vida cotidiana, de las matemáticas mismas y de otros ámbitos, que impliquen la formulación y solución de sistemas de ecuaciones; varias investigaciones han demostrado que existe una gran dificultad en su aprendizaje. Para generar nuevas estrategias que aborden este concepto se desarrollará una unidad didáctica con los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Marceliana Saldarriaga ubicada en el municipio de Itagiú debido a que la mayoría de estudiantes de la institución no tienen claro este concepto y se centran en manejar algoritmos de forma mecánica para solucionar estos sistemas de ecuaciones. Este trabajo propone una estrategia didáctica que pretende ser una solución al problema planteado, al integrar temas de la matemática a través de diferentes métodos de solución de ecuaciones utilizando herramientas gráficas en diferentes contextos para lograr un aprendizaje significativo del concepto de ecuación en los estudiantes.

Palabras claves: ecuación, estrategia, aprendizaje significativo, unidad didáctica, sistemas de ecuaciones.

Abstract

Understanding the concept of equation is a key to solve problem situations of daily living, not only in mathematics itself, but also in other areas that involve the formulation and solution of equations systems. Several investigations have shown that students face great difficulties in the learning process of this aspect. In order to generate new strategies to approach students to this concept, a teaching unit will be developed with students of School Marceliana Saldarriaga located in the municipality of Itagüí due to the lack of clarity that most of the students from this institution have around this concept, who focus on mechanically handling algorithms for solving these systems of equations. This paper proposes a teaching strategy that aims to be a solution to this problem, by integrating topics of mathematics through different methods of solving equations using graphical tools in different contexts to achieve a significant learning of the concept of equation.

Keywords: Equation, strategy, significant learning, teaching unit, graphical tools, equation systems.

Índice general

Agradecimientos	3
Resumen	4
Abstract	5
1. Introducción	9
2. Planteamiento del Problema	11
3. Justificación del Problema	13
4. Objetivos	15
4.1. Objetivo General	15
4.2. Objetivos Específicos:	15
5. Antecedentes	16
6. Marco Referencial	27
6.1. Marco Teórico	27
6.2. Una Estrategia Didáctica para las Matemáticas desde el Enfoque de Situaciones Problema	29
6.3. Marco Conceptual y Disciplinar	32
6.4. Marco Legal	37
7. Desarrollo de la Propuesta	40
7.1. Reconocimiento de Ideas Previas	40

7.2. Construcción de Explicaciones	40
7.2.1. Todo lo que se Debe Saber sobre las Ecuaciones	41
7.2.2. Métodos para solucionar Sistemas de Ecuaciones	47
7.2.3. Sugerencias a la hora de realizar ejercicios	56
7.2.4. Más sobre Ecuaciones	65
7.3. Evaluación De la Unidad Didáctica	71
8. Descripción de la Implementación	72
8.1. Reconocimiento de Ideas Previas	72
8.2. Construcción de Explicaciones - Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones	73
8.3. Evaluación Final	81
9. Resultados y Análisis de resultados	82
9.1. Resultados Obtenidos	82
10. Conclusiones	84
10.1. Conclusiones	84
A. Prueba Diagnóstica	86
B. Guía de estudio 1	88
C. Actividad 1	91
D. Guía de estudio 2	93
E. Actividad 2	96
F. Guía de estudio 3	98
G. Actividad 3	102
H. Guía de estudio 4	104
I. Actividad 4	107
J. Taller de Aplicación	109

K. Taller de Repaso

112

L. Evaluación

114

Capítulo 1

Introducción

Tanto en la educación como en todos los campos profesionales, hoy se requiere de un aprendizaje continuo. El desarrollo de los procesos educativos tiene una nueva concepción de aprendizaje y de estrategias de enseñanza: El aprendizaje debe ser construido por el propio sujeto (constructivismo), en un aprendizaje activo, de manera significativa, es decir que parta desde sus intereses y necesidades, enfocado a la resolución de problemas prácticos.

Por lo anterior es necesario adecuar las estrategias de enseñanza aprendizaje donde el estudiante sea un sujeto activo en la construcción del conocimiento y donde el docente sea un facilitador, que conozca los procesos implicados en el aprendizaje e implemente métodos flexibles adaptados a las necesidades individuales, basadas en el diálogo.

Es evidente que dentro del aula de clase no se logra tener a todos y todas sumergidos(as) en los temas pues todo lo que representa academia es sinónimo de opresión e imposición, es su entorno el que los obliga a estar donde están y no sus propias necesidades.

Optando por los medios que se nos ofrecen estamos dándole al estudiante la oportunidad de exponer sus intereses y demostrar cual útil es todo aquello que se está planteando y que con la rutina se ha vuelto monótono.

Con esta propuesta lograremos que el método de estudio cambie, las perspectivas tanto del estudiante como del docente estarán centradas en los avances que no podemos sacar del aula y mucho menos del aprendizaje y cada uno de los participantes

en la clase será un sujeto activo dentro del proceso cognitivo, así como también se estará dando la pauta para que en el futuro se busque la opción más indicada para brindar la forma de adquirir el conocimiento teniendo en cuenta las diferencias individuales de acuerdo con cada contexto.

Dentro de los Estándares de Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional se encuentra uno asociado a los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales incluido dentro del pensamiento variacional y sistemas algebraicos que propone: “Identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales”. Partiendo de este punto y teniendo en cuenta los errores y dificultades detectados a la hora de abordar el concepto de ecuación que pueden presentar los estudiantes en este tema: dificultades conceptuales, que hacen referencia a la naturaleza de los contenidos de ecuaciones y modelos, y dificultades cognoscitivas, es decir el tipo de pensamiento requerido para la comprensión de estos conceptos, se presenta una propuesta de aprendizaje diferente ya que tradicionalmente las prácticas en el aula abordan la solución de sistemas de ecuaciones lineales haciendo un especial énfasis en los métodos algebraicos, dejando poco o ningún espacio para el método gráfico.

Considerando esta realidad, se determinó diseñar e implementar una unidad didáctica sobre este último método con el fin de potenciar capacidades que el método algebraico por sí solo no desarrolla en los estudiantes.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

La Institución Educativa Marceliana Saldarriaga, se encuentra ubicada en el municipio de Itagüí, en su parte norte, cuenta con aproximadamente 2.200 estudiantes, de los diferentes barrios aledaños, cada uno de ellos con las características propias que les da el entorno, porque aunque todos pertenecen al mismo municipio, no todos tienen los mismos intereses, ni las mismas expectativas, ni los mismos recursos. Son un grupo bastante heterogéneo, cada uno de ellos es un mundo diferente, por lo tanto es necesario buscar un interés común para darle solución a las debilidades que se presentan.

El grupo de docentes se caracteriza por ser idóneo en cada una de las áreas que sirven, pero aun así se sigue observando en ellos la clase tradicional que hace que se vuelvan monótonas y de poco interés.

La apatía de los estudiantes a nivel de la asignatura de matemáticas es casi total, se pueden utilizar todas las actividades pedagógicas con que se cuente pero ellos nunca encuentran algo que los motive, sólo una minoría está al tanto del desarrollo de la clase.

La poca participación en el aula se da en un alto porcentaje, sienten que se ridiculizan si exponen su punto de vista o que lo que expresan no es de importancia para los que están con ellos dentro del salón de clase.

Es evidente que no se observa en los jóvenes una actitud receptiva, ni motivada hacia la matemática; no se vislumbra en el proceso de aprendizaje un cambio de ellos por esta área, evidenciándose en el bajo desempeño académico, un bajo rendimiento

escolar. El 40 % de los estudiantes se encuentran en un desempeño académico bajo, el 50 % en un desempeño básico y el 10 % en un desempeño alto. Es claro que se deben hacer cambios drásticos, sólo así se obtendrán nuevas acciones en este campo.

El aprendizaje es un proceso que incluye a toda la comunidad educativa: docentes, estudiantes, directivos y grupo familiar; en este la tecnología es un medio potenciador para el aprendizaje colaborativo. No es el proceso de aprendizaje en sí el que va cambiando pero la herramienta potencia la interacción y nuevas formas de comunicación.

Los currículos educativos, los métodos docentes y los sistemas de evaluación, que guían las actuaciones del profesorado, no han evolucionado al mismo ritmo que las nuevas formas de acceso a la información y al conocimiento, evitando a la educación un adelanto significativo que logre despertar en los estudiantes la creatividad e iniciativa necesarias para ser parte del desarrollo social.

En esta propuesta es necesario involucrar a toda la comunidad educativa: Las directivas para facilitar la utilización de los equipos y recursos educativos como aulas virtuales y conexión a internet. Los docentes de todas las demás áreas para generar una transversalidad del conocimiento. Los padres de familia para acompañar y motivar a sus hijos en el proceso de enseñanza aprendizaje en pro de una mayor comprensión y ejecución de los conceptos adquiridos. Y claro está, los estudiantes como sujetos activos que participan directamente en este proceso.

El presente trabajo de investigación surge a raíz de la experiencia en las aulas de educación secundaria, al notar que los alumnos no están siendo motivados para resolver problemas de matemáticas en general y específicamente, problemas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales. Están más orientados a resolver sistemas de forma rutinaria y algorítmica, usando los métodos de forma mecánica y resuelven problemas típicos y sin darle un sentido lógico a lo que están resolviendo.

Esta propuesta tiene como intención diseñar una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje del concepto de ecuación modelando situaciones problemas, con ayuda de métodos gráficos. Se busca además que los estudiantes de la Institución Educativa Marceliana Saldarriaga adquieran un aprendizaje significativo del concepto de ecuación e identifiquen su importancia en la modelación de situaciones problemas de diferentes contextos.

Capítulo 3

Justificación del Problema

El mundo de hoy se está transformando gracias a los avances y a las nuevas expectativas que constituyen el quehacer diario de los diferentes estamentos de la comunidad educativa. Las formas de acceso al conocimiento, de aprendizaje, de comunicación y de relación entre nosotros mismos son diferentes. Las ciencias aplicadas están evidenciando un factor de poder y productividad en la capacidad de generar y aplicar la información basada en el conocimiento. Muchos autores afirman que las matemáticas deben ir unidas a todas las demás áreas, porque se apoyan gradualmente e interactúan en el proceso de enseñanza aprendizaje. A partir, de las experiencias personales, considero que el buen desempeño en el área de las matemáticas, es el resultado del aprendizaje de la lectura, del reconocimiento de los signos, símbolos y representaciones, entre otros. Es decir, que cuando el joven conoce y reconoce los signos y símbolos, procede a expresar en forma clara y coherente los diversos problemas numéricos y es allí donde se tienen las bases para un proceso adecuado.

Aprender a llevar a cabo procesos matemáticos para solucionar diversas ecuaciones, suelen ser procedimientos complejos para los jóvenes en sus años escolares, ya que se les dificulta el hecho de llevar a la práctica y por ende aplicar a la cotidianidad la solución de problemas. Este hecho se ve reflejado en su actitud frente a la escuela, mostrando apatía y poca motivación por actividades donde estas estén implícitas, pero poco a poco van mostrando interés que los lleva a participar activamente de su proceso de enseñanza de aprendizaje y a ser constructores de su propio conocimiento.

Los estudiantes de la institución educativa Marceliana Saldarriaga presentan di-

ficultades cognitivas en el concepto de ecuación y su aplicación en situaciones de la vida cotidiana, lo cual está claramente reflejado en las estadísticas de los resultados académicos de los estudiantes en el pensamiento variacional y en las pruebas Censales (Saber). La unidad didáctica que se pretende trabajar describe el proceso de desarrollo, implementación y evaluación para la enseñanza del tema de ecuaciones en un nivel básico superior, basándose principalmente en la teoría del aprendizaje significativo.

Entre las dificultades que más sobresalen en el aprendizaje de las ecuaciones esta el poco conocimiento de lenguaje matemático con el que cuentan los estudiantes, al ser necesario el dominio de operaciones básicas y algebraicas. Los estudiantes deben tener claros los conceptos de plano cartesiano, potenciación, radicación, logaritmos, productos notables, factorización, desigualdades e inecuaciones, para abordar de manera satisfactoria esta unidad didáctica.

El concepto y la aplicación del concepto de ecuación, llevan consigo características de abstracción, que como educadores transmitimos a los estudiantes bajo ese mismo modelo. Esta unidad didáctica desea establecer situaciones de aprendizaje desde las posturas conductistas, constructivistas e inductivas. Está diseñada para que los estudiantes conozcan aspectos teóricos y actividades de verificación y descubrimiento. Los aspectos teóricos se abordan exponiendo los conceptos y las definiciones en un sentido clásico; las actividades requieren las competencias interpretativa, argumentativa y propositiva, además del uso de las TIC, que actúan como un elemento mediador para que el estudiante construya su propio conocimiento, realizando conjeturas y conceptualizando mediante la observación de cambios y comportamientos de diferentes gráficas.

Capítulo 4

Objetivos

4.1. Objetivo General

Diseñar e implementar una estrategia didáctica para la enseñanza del concepto de ecuación y sus aplicaciones modelando situaciones problemas a través de un método gráfico para lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Marceliana Saldarriaga del municipio de Itagüí.

4.2. Objetivos Específicos:

- Elaborar una prueba diagnóstica para conocer los saberes previos que presentan los estudiantes de la IE. Marceliana Saldarriaga, para determinar condiciones iniciales e identificar dificultades.
- Elaborar una nueva estrategia metodológica que permita al estudiante reconocer las diferentes características de los sistemas de ecuaciones.
- Crear variedad de actividades prácticas a partir de situaciones problemas que faciliten la comprensión de cómo se pueden abordar diferentes sistemas de ecuaciones para llegar a una solución correcta.
- Sistematizar y analizar el impacto de la estrategia didáctica utilizada para la comprensión de la solución de sistemas de ecuaciones en los estudiantes del grado noveno.

Capítulo 5

Antecedentes

Luego de hacer un análisis profundo sobre los diferentes autores que han basado sus métodos de enseñanza en la solución de problemas matemáticos, y partiendo de la caracterización de cada uno de ellos, se hace evidente y necesario entender que el proceso de aprendizaje debe incluir no solo lo académico sino también el aspecto humanista para desarrollar las habilidades en la utilización de los elementos que conforman esta nueva etapa del aprendizaje.

Es necesario que los estudiantes miren este aprendizaje con toda la responsabilidad que se requiere, pues se hace merecedora de dedicación e interés para captar cada uno de los conceptos que se quiere dejar en la memoria de los estudiantes; ellos deben interiorizar el aprendizaje de manera clara, pues tienen todas las herramientas para dar solución a las inquietudes que puedan surgir.

A partir de los diferentes tipos de aprendizaje, el estudiante adquiere una capacidad especial para dar a conocer sus ideas y opiniones desde la crítica constructiva que aporta soluciones a los problemas que se plantean o que ponen sobre la mesa, inquietudes que no ha sido posible solucionar desde la práctica individual; la interrelación con el otro es una de las mejores maneras para obtener los resultados esperados.

Dentro de todo tipo de aprendizaje, el estudiante es un sujeto activo que pone a disposición de todo un grupo de trabajo sus conocimientos, intereses y facultades para sacar adelante diversos proyectos. Así mismo, aquellos que conforman ese grupo son aportantes directos a su propio proceso. Desde esta concepción todos son miembros activos de un proceso de aprendizaje, donde cada uno tiene algo importante para

aportar, constituyéndose todo el grupo en una red de conocimiento participativo y colectivo, incluidos en este, el maestro orientador.

Teniendo en cuenta la falta de motivación en nuestro estudiantado, en cada una de las áreas, específicamente en nuestro caso el de las matemáticas, el docente no puede negarse la posibilidad de entrar en el mundo de la tecnología y hacer de esta una herramienta para brindar los conocimientos, captando el interés del joven. Debe cada educador abrirse a una era que aunque no sea nativo de ella, puede ser inmigrantes con una inmensa facultad para aprender lo que los estudiantes tienen para darnos, por consiguiente, estaremos haciendo que nuestros estudiantes reciban nuestros conocimientos de manera directa con los medios que ellos manejan a la perfección.

En este proceso, el estudiante es el protagonista de su propio aprendizaje y el maestro es una de las herramientas a utilizar para que ellos sean partícipes activos de sus conocimientos. Desde esta concepción se pueden obtener resultados que desde el método tradicional es imposible conseguir; desde allí las matemáticas y el trabajo con diversas ecuaciones deja de ser aburrido y complicado para convertirse en entretenido y fácil.

Partiendo de estos conceptos y de lo que se quiere obtener, podemos basar la enseñanza en las ideas de algunos autores sobre la educación y de la importancia del aprendizaje significativo. Entre ellos tenemos:

Novak [Novak, 1977] en su teoría de educación tuvo como constructo central el aprendizaje significativo. Es él quien le da el carácter humanista al término puesto que considera la experiencia emocional en el proceso de aprendizaje. Este autor define el encuentro educativo como una acción para intercambiar significados y sentimientos entre el alumno y el profesor. Aporta además los mapas conceptuales para facilitar el aprendizaje significativo.

La Teoría de Educación de Gowin [Gowin, 1981]: desarrolla profundamente el aprendizaje significativo como el proceso en el que se comparten significados y se delimitan responsabilidades. Gowin dice que: “La enseñanza se consume cuando el significado del material que el alumno capta es el significado que el profesor pretende que ese material tenga para el alumno”. El profesor, el aprendiz y los materiales educativos del currículo son un eje básico en el evento educativo, donde las personas

intentan llegar a acuerdos sobre los significados atribuidos.

El carácter crítico del aprendizaje significativo lo trata Moreira [Moreira, 2000]: cuando el alumno identifica semejanzas y diferencias y reorganiza su conocimiento, realiza un papel activo en el proceso de aprendizaje; esta es su responsabilidad y depende de su actitud significativa del aprendizaje la cuál debe afectar la concepción sobre el conocimiento y su utilidad. Las preguntas del qué se quiere aprender, por qué y para qué aprenderlo tienen una estrecha relación con los intereses e inquietudes que todas las personas tenemos.

La teoría de Situaciones Didácticas está sustentada en una concepción constructivista, en el sentido Piagetano del aprendizaje, concepción que es caracterizada por Brousseau [Brousseau, 2007]: El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje.

En ese sentido, el aprendizaje por adaptación es producto de la interacción del sujeto con el medio o situaciones problemáticas, sin la intervención del profesor, logrando que el alumno desarrolle sus propias producciones matemáticas. Es muy importante tener en cuenta esta concepción de aprendizaje para el diseño de las actividades didácticas, ya que servirá para que el profesor diseñe el medio con la intención de que el estudiante adquiera un conocimiento matemático.

Bajo estos aspectos, el profesor debe proponer a los alumnos situaciones matemáticas reales que ellos puedan vivir, y que provoquen la emergencia de auténticos problemas matemáticos.

Este trabajo se sustentará en las observaciones e investigaciones que se han realizado en torno a las ecuaciones, ya que al hacer el rastreo bibliográfico, se ha observado que han sido muchísimos los trabajos que se han hecho al respecto.

A continuación se le da relevancia a algunos que se consideran como antecedentes importantes ya sea porque la temática que abordan se relaciona con la del presente trabajo o porque sus resultados le darán una visión más amplia al tema en cuestión.

Es curioso encontrar trabajos no solo a nivel de la educación básica, sino aún más en la educación superior, como lo es el caso de la tesis de la magíster Silvia Guadalupe Maffey García. Su trabajo es una investigación sobre la situación actual

de la enseñanza de las ecuaciones lineales en el nivel medio superior, que tiene como fundamento metodológico la ingeniería didáctica. Este consiste en una valoración del estado en que se encuentra la enseñanza de esta temática en el nivel medio superior, tomando en consideración el grado de importancia que se le da a la resolución de problemas por medio de las ecuaciones. Al mismo tiempo, muestra un contraste entre la situación encontrada con lo que pretenden lograr las instituciones educativas de nivel medio superior en cuanto a la enseñanza del tema. Por último, finaliza con una propuesta que pretende aproximar a los estudiantes a las ecuaciones de primer grado a partir de la resolución de problemas que provengan de contextos cotidianos.

Schoenfeld, Duval y Herscovics entre otros; citados por [Hoyos, 1998]. En su reseña Hoyos, pone de manifiesto el nivel de dificultad encontrado en el significado convencional que los estudiantes de bachillerato dan a la temática de las ecuaciones lineales, aun para estudiantes que cursan los primeros años de colegio. Del mismo modo, muestra las observaciones realizadas por cada investigador. En sus conclusiones nombra los grados de dificultad en torno al significado de las ecuaciones lineales y sugiere que tal vez el problema de producción de una ecuación lineal a partir de la imagen gráfica sea un lugar adecuado de observación entre los diferentes tipos de pensamiento algebraico.

Los primeros aprendizajes algebraicos. El fracaso del éxito [Panizza et al., 1999]. Su trabajo trata de identificar las condiciones de apropiación del álgebra elemental en estudiantes de secundaria, basándose en los primeros aprendizajes, considerando fundamental la utilización de letras como variables e incógnitas. Su investigación la escribe en el marco teórico y metodológico de la teoría de situaciones propuesta por Brousseau, G; (1987) , y de la ingeniería Didáctica (Artigue, M; 1988). Como lo han señalado algunos investigadores (Cortés, A- Vergnaud, G- Kavafian, N; 1990, Chevillard, I; 1984), el aprendizaje del álgebra parte de rupturas epistemológicas significativas. Desde esta perspectiva, los investigadores proponen realizar un conjunto de observaciones de clases introductoras al álgebra y analizar las propuestas de los textos escolares que sirven de apoyo a los docentes que orientan el área.

[Godino, 1991], manifiesta cómo el profesor en vez de proporcionarle al estudiante el conocimiento, debe proponerle una situación diseñada de tal forma que el conocimiento sea necesario para su solución y donde el alumno aprenda a defenderse en un

contexto con algún tipo de dificultades que le generen algún desequilibrio. De esta manera, si el estudiante se adapta a la situación y llega a la solución del problema, estará proporcionando evidencia de haberse apropiado del saber en cuestión, es decir, que ha aprendido.

[Panizza et al., 1999] presenta el trabajo de seis estudiantes en relación al tema ecuación lineal con dos variables. Los estudiantes habían previamente elaborado la concepción de ecuaciones como igualdades numéricas en las que las letras designan números a ser encontrados y había además, estudiado recientemente los sistemas de ecuaciones 2×2 . Las autoras se preguntaron si los estudiantes podrían concebir una ecuación con dos variables aislada de los sistemas de ecuaciones, si serían capaces de otorgar entidad al objeto ecuación de dos variables y al mismo tiempo reconocerlo como parte de un sistema de ecuaciones lineales y cómo enfrentarían la situación de que una ecuación puede tener infinitas soluciones, teniendo en cuenta la concepción de las letras como incógnitas que habían elaborado previamente. También se cuestionaron si los conocimientos aritméticos ayudarían a los estudiantes como cuando estudiaron ecuaciones con una incógnita y si la noción de variable es utilizada en el trabajo con los estudiantes en el ámbito de las ecuaciones o su mención se restringe al contexto de las funciones que en general se enseñan en forma separada. Si bien señalan que no es su intención contestar a todos estos interrogantes, las autoras concluyen que la ecuación lineal con dos variables no es reconocida por los estudiantes como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números. [Mora, 2001] estudia algunas dificultades asociadas a la interpretación del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales. Menciona lo reportado por Eslava y Villegas [Eslava & Villegas, 1998] que detectaron que la mayoría de los estudiantes contestan que un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas donde las rectas asociadas a las ecuaciones se cortan dos a dos, tiene tres soluciones pues las asocian a los puntos de corte que surgen de tomar cada par de rectas. Mora también menciona que en las prácticas de aula, los docentes evitan proponer a los estudiantes sistemas de ecuaciones incompatibles o indeterminadas, sobre todo al momento de emplear un método algebraico de resolución, pues conducen a situaciones donde aparecen por ejemplo expresiones del tipo $0 = 0$ o $0 = 5$, que acarrearán dificultades al momento de ser interpretadas. Específicamente, Mora se propuso entonces, estu-

diar qué afirman los estudiantes cuando al resolver un sistema de ecuaciones lineales llegan a expresiones del tipo $0 = 0$ o $0 = r$ donde r es un número real distinto de cero, y trató de explicar a lo largo de su investigación, qué significado tiene esto para los estudiantes en el contexto de los sistemas de ecuaciones, y cómo podría darse a estas expresiones una interpretación geométrica. Su objetivo de investigación fue lograr una conexión en los modos de pensamiento analítico y sintético-geométrico a través de una secuencia de problemas, que permitieran ver en juego estos dos modos de pensamiento enfocando la construcción de la noción de solución de un sistema de ecuaciones. En su análisis pudo constatar que los estudiantes manejan un pensamiento analítico y un pensamiento geométrico más o menos elaborado, pero no logran establecer una relación clara entre ambos pensamientos. Después de haber analizado algunas expresiones verbales y escritas de los estudiantes, pudo detectar algunos trazos de pensamiento analítico y sintético-geométrico y vio que este último les proporciona información más natural para contestar correctamente ciertas cuestiones matemáticas. Es en la interacción entre ideas intuitivas y formales que los estudiantes no logran establecer, por ejemplo, las equivalencias entre una expresión $0 = 0$ y dos rectas coincidentes.

[Filloy et al., 2003] analizan el significado del signo igual que es generado cuando los estudiantes utilizan el método de sustitución o igualación para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Estos métodos son usualmente presentados a través de un proceso de extensión de la sintaxis y significados enseñados para resolver ecuaciones lineales con una incógnita. A través de estos procesos algunos estudiantes pudieron dar sentido a los métodos y generar nuevos significados. Los autores concluyen que la dialéctica entre la sintaxis y la semántica constituye el principal obstáculo en la ocurrencia de errores cuando se sigue una regla para la cual es necesario usar una o más reglas que requieran de competencia previa.

DeVries y Arnon [DeVries & Arnon, 2004] reportan una investigación realizada en el marco de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), que aborda el concepto de solución de un sistema de ecuaciones. Las entrevistas que realizaron revelaron varias concepciones erróneas del concepto solución de una ecuación. El propósito del trabajo que reportaron fue lograr una aproximación a las ideas que los estudiantes poseen sobre solución y comenzar a realizar una primera versión de des-

composición genética para este concepto. En particular, señalan que en esta primera fase de su investigación y de acuerdo con las deficiencias del cuestionario que aplicaron, pudieron obtener muy poca información acerca del concepto de solución de una ecuación. Los autores terminan sugiriendo una secuencia de aprendizaje que surge de la descomposición genética por ellos realizada. Proponen comenzar ayudando a los estudiantes a construir el nivel de acción del concepto de ecuación, incluyendo el concepto de solución, la habilidad de identificar en ella dos funciones, la intersección de sus dominios, sus codominios, y solución como un elemento del dominio, tal que al realizarse la sustitución permita obtener una proposición verdadera. En esta instancia proponen sustituir por elementos del dominio común y ver si son o no soluciones.

[Cutz, 2005] analiza algunos fenómenos relacionados con la representación geométrica del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas, y las dificultades de los estudiantes relativos al tránsito entre diferentes representaciones de los sistemas de ecuaciones lineales: la geométrica y la analítica. Utiliza como marco teórico el presentado en Sierpiska [Sierpiska, 2000] relativo a los diferentes modos de pensamiento en álgebra lineal y propone diversas actividades a los estudiantes que ponen en juego estos modos de pensamiento. Cutz concluye que la mayoría de los estudiantes entrevistados presenta una gran dificultad para lograr un tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales tanto de dos como de tres incógnitas. En particular, los estudiantes presentan problemas con el concepto solución en el momento de efectuar un pasaje del modo sintético-geométrico al analítico-aritmético o analítico-estructural. También quedó en evidencia que los estudiantes tienden a relacionar la solución de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, con el punto de intersección de al menos dos de las rectas que representan gráficamente al sistema. Recomienda relacionar a la solución de un sistema de ecuaciones lineales con su representación gráfica y poner mayor atención al significado del concepto, evitando que la explicación quede sujeta a los métodos de resolución. Sugiere buscar estrategias que favorezcan el tratamiento de los sistemas en los diferentes modos de pensamiento y proponer actividades a los estudiantes que requieran el tránsito entre ellos.

[Ramírez, 2005] se plantea identificar y analizar las dificultades que presentan

los estudiantes en la representación gráfica y la presentación analítica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Utiliza como marco teórico los modos de pensamiento presentados por Sierpinska [Sierpinska, 2000].

Los estudiantes que entrevistó evidenciaron dificultades al trabajar con sistemas con infinitas soluciones y su representación gráfica; tuvieron problemas para plantear las ecuaciones de un sistema dado, mostrando dificultades con el tránsito entre el modo de pensamiento geométrico y el modo analítico. Manifestaron dificultades también para interpretar la expresión $0 = 0$, señalando que el sistema no tiene solución. Ramírez recomienda el diseño de situaciones novedosas que involucren diferentes modos de pensamiento y que requieran tanto el análisis de sistemas con solución única, como los casos sin solución o con infinitas soluciones, sin privilegiar el primero de ellos.

[Alcocer, 2007] se propone profundizar en el entendimiento de las dificultades que presentan los estudiantes del nivel superior con el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales en los contextos analítico y geométrico, considerando los casos de solución única, infinitas soluciones y el caso de no solución.

Como marco teórico utiliza los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska [Sierpinska, 2000]. Alcocer observa que los estudiantes de Ingeniería con los que trabajó, consideran como solución de un sistema de ecuaciones lineales los puntos de intersección de las rectas del sistema tomadas de a dos o los puntos de intersección de las rectas del sistema con los ejes coordenados. También observó que los estudiantes piensan que el número de soluciones de un sistema está relacionado con el número de incógnitas del sistema, esto es, si un sistema tiene dos incógnitas tendrá dos soluciones, si tiene tres incógnitas tendrá tres soluciones, etc. Los estudiantes con los que se trabajó no pudieron distinguir los diferentes casos de solución para un sistema, presentando por ejemplo un sistema con solución única cuando se les pedía un sistema sin solución. Estas concepciones erróneas permanecieron aún después de un curso de álgebra lineal que tuvo énfasis en corregir los errores antes mencionados. Alcocer sugiere entonces que no basta con tratar ejemplos aislados, sino que es necesario dotar de sentido a los conceptos y procedimientos que se desea enseñar.

[Manzanero, 2007] identifica las dificultades que presentan los estudiantes al estudiar el concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales. Sustenta

su trabajo en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). Entrevistó a seis estudiantes del nivel superior y observó que ningún estudiante mostró tener una concepción objeto para el concepto de conjunto solución y que pocos de ellos mostraron haber construido un proceso de solución, en particular en el caso de los sistemas con tres variables. También se apreciaron dificultades con la parametrización.

Manzanero recomienda que en vías de lograr una interiorización del concepto es necesario presentar a los estudiantes la solución de los sistemas de ecuaciones en forma algebraica, trabajando en forma coordinada con la construcción y solución del sistema en forma geométrica. La coordinación de estas dos representaciones permitirá lograr una mejor comprensión en la solución de los sistemas de ecuaciones. También sugiere presentar a los alumnos todos los casos posibles de solución de un sistema de ecuaciones, utilizando diferentes representaciones y no limitarlos a la solución de ejemplos prototípicos. Recomienda además presentar a los estudiantes problemas no triviales para la resolución de sistemas de ecuaciones, con el fin de que se enriquezca su esquema del concepto de solución.

En el trabajo de Fermina Mercedes González Pérez, Resolución de problemas que conducen al planteamiento de ecuaciones lineales (eugeniogp@eiefd.co.cu), la autora nos plantea la necesidad de precisar el papel de las matemáticas para lograr el vínculo con la vida y su responsabilidad en el desarrollo del pensamiento y razonamiento lógico de los alumnos como base y parte esencial de la formación integral de su personalidad. Se entiende así el papel especial que han desempeñado los problemas en la clase de matemáticas ya que se comprende la resolución de problemas como una de las actividades básicas del pensamiento. Pero no hay un trabajo sistemático que permita la consolidación de los conocimientos y del dominio de acciones básicas en la ejecución de procedimientos para la resolución de problemas. Este hecho provoca como cuestionamiento actual: ¿Qué estrategias se deben implementar que permitan el desarrollo de competencia y habilidades en los alumnos para la resolución de problemas matemáticos? En este sentido, la autora nos propone la implementación de actividades en función de los estudiantes que favorezcan el desarrollo de estas habilidades como objetivo fundamental y que deberá aparecer en el programa de la asignatura, de la enseñanza media. Para ello se tendrá presente, antes que nada, que el buen desarrollo de habilidades en la resolución de problemas que conducen

al planteamiento de ecuaciones lineales se sustenta desde diferentes concepciones psico-pedagógicas y filosóficas en su origen y evolución, lo que permite proyectar los modos de expresión y de actuación de los individuos acorde con las nuevas exigencias en el desarrollo del pensamiento y el aprendizaje y además de la comprensión y solución de disímiles situaciones de la vida. También es importante que se tenga en cuenta que el desarrollo de las competencias y habilidades en la resolución de problemas que conducen al planteamiento de ecuaciones lineales, en gran parte de los estudiantes no es suficiente, pues buena parte de los errores en la resolución de problemas lo constituye la dificultad en la comprensión lectora e interpretación de las situaciones que se le plantean. Acá muchos docentes cometemos errores, pues con mucha frecuencia recurrimos al existencialismo y al paternalismo, bajo el supuesto de “facilitarle” el proceso al estudiante, hacemos casi que su trabajo y le negamos la posibilidad de hacer los esfuerzos que él debe realizar para potenciar y garantizar sus aprendizajes.

Francisco Rivero Mendoza [Mendoza, 1987] en su obra “Un modelo pedagógico para la enseñanza de los números enteros y la resolución de ecuaciones algebraicas de primer grado” nos señala una serie de dificultades que enfrentan los estudiantes en la resolución de ecuaciones de primer grado con los números enteros. Nos muestra de manera innegable, que la utilización mecánica y ausente de significado que se hace de los símbolos y de muchas reglas y procedimientos, afecta notablemente y de manera negativa, el proceso de enseñanza y aprendizaje tradicional, que entre otras cosas enfatiza en gran medida en aquellos aspectos relativos a la ejecución de reglas entre símbolos, sin justificación ni explicación alguna.

Presenta cómo ese proceso educativo tradicional tiene la tendencia a que los alumnos mecanicen y rutinicen procedimientos, que les permitan lograr supuestamente, competencias y habilidades en la resolución de ecuaciones; procedimientos y rutinas estas, que se olvidan fácilmente al avanzar en sus estudios. Propone en consecuencia la inclusión dentro del aula de clases del modelo MOFIP, consistente en la representación de las ecuaciones en un tablero, en el cual se aplican ciertos principios y reglas que posibilitan comprensivamente, resolver dichas ecuaciones. Este modelo posibilita dotar de significado a los símbolos, facilitando los procesos de desarrollo del aprendizaje del álgebra en general, y de la resolución de ecuaciones de primer

grado en particular. Se sugiere no asumir este modelo como una simple actividad para apoyar el proceso educativo, sino que se incluya en el currículo del área como una estrategia valiosa e importante a implementar en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Pero lo anteriormente planteado, requiere importantes y significativos cambios en la instrucción tradicional implementadas en las instituciones educativas; con seguridad que se presentarán grandes dificultades y problemas si el docente no aborda el nuevo método con los requerimientos indicados. Es importante reconocer que, si bien es cierto que el modelo ha sido aceptado en buena medida por varios docentes que han asistido a las charlas y talleres organizados por el autor, se hace indispensable realizar una investigación sobre el uso de este modelo en el aula, para tener una evidencia científica sobre sus bondades y potencialidades. En varias pruebas experimentales realizadas con niños en forma individual, y trabajando problemas planteados con palabras, se observaron buenos resultados. Estos niños fueron capaces de plantear las ecuaciones y resolverlas en el tablero en corto tiempo.

Capítulo 6

Marco Referencial

6.1. Marco Teórico

Esta propuesta de trabajo está concebida desde el aprendizaje significativo en la resolución de problemas. [Ausubel et al., 1983] exponen sobre la importancia del significado del aprendizaje que se logra cuando la nueva información, se pone en movimiento y se relaciona con conceptos ya existentes en la mente del que aprende, es decir, conceptos inclusivos o inclusores. Para este tipo de aprendizaje, Ausubel menciona que debe existir lo que denomina “actitud para el aprendizaje significativo”, que se trata de una disposición por parte del aprendiz para relacionar una tarea de aprendizaje sustancial y no arbitraria, con los aspectos relevantes de su propia estructura cognitiva.

La solución de problemas es importante para el estudiante porque se abarcan las competencias conceptuales, procedimentales y actitudinales y tienen valor porque son valiosas para la escuela y la vida. Debemos llevar a un segundo plano la simple solución de ejercicios que conllevan a la práctica de la repetición sin que el estudiante logre descubrir donde reside el problema o la dificultad, inhibiendo los procesos de interpretación y proposición para poder transformar el significado lógico de la materia en producto de aprendizaje significativo.

El aprendizaje significativo produce mayor retención de la información, además

facilita la adquisición de nuevos conocimientos relacionándolos con los anteriormente adquiridos, ya que al estar claros en la estructura cognitiva se facilita la retención del nuevo contenido. Este tipo de aprendizaje está fundamentado en la teoría constructivista y permite que el estudiante sea más activo, pues depende de la asimilación de las actividades de aprendizaje por sí mismo. Así, “El mismo proceso de adquirir información produce una modificación tanto de la información adquirida como en el aspecto específico de la estructura cognoscitiva con la cual aquella está vinculada”.

La unidad didáctica facilita el aprendizaje pues la organización y sistematización de los contenidos permiten una mayor construcción de conocimientos, aumentando la motivación y el interés. Para conseguir este aprendizaje se debe tener un adecuado material y recursos acordes con las temáticas de la guía, para garantizar la motivación de los estudiantes en las actividades.

Los aprendizajes por repetición no permiten establecer relaciones cognoscitivas, son de rápido olvido y no son reales ni significativos. El aprendizaje significativo permite entablar nexos entre los conocimientos previos y los actuales, generando aprendizajes de conceptos a largo plazo.

Para ejecutar de manera correcta las guías didácticas, es importante:

- El trabajo en equipo.
- Los recursos o materiales para mejorar los niveles de comprensión de los conceptos.
- La autoevaluación.
- Proponer actividades que intensifiquen la motivación intrínseca.
- Asociar los conceptos matemáticos al medio que rodea los estudiantes en la medida de lo posible.
- Relación horizontal entre maestro-estudiante, donde el docente es asesor y guía en el proceso.

- Ubicar los conceptos matemáticos en la vida diaria, para lograr transferencia.

6.2. Una Estrategia Didáctica para las Matemáticas desde el Enfoque de Situaciones Problema

Una situación problema es un espacio para la actividad matemática, en donde los estudiantes, al participar con sus acciones exploratorias en la búsqueda de soluciones a las problemáticas planteadas por el docente, interactúan con los conocimientos matemáticos y a partir de ellos exteriorizan diversas ideas asociadas a los conceptos en cuestión.

La construcción de situaciones problema exigen, al maestro, tener dominio del saber matemático, para recontextualizarlo de acuerdo con los saberes previos y las condiciones cognitivas de sus estudiantes; y luego, decidir las actividades que van a orientar la interacción de estos con los conceptos.

Las situaciones problema dinamizan la actividad del estudiante y orientan su manera de pensar respecto a las actividades planteadas y los conceptos implícitos en las mismas. Para Luis Moreno y Guillermo Waldegg:

“La situación problema es el detonador de la actividad cognitiva, para que esto suceda debe tener las siguientes características: Debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender. Debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible a él. Debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores . . .”

Por lo tanto, para motivar a los alumnos a las exploraciones de ideas y la concertación de significados con los demás compañeros, las situaciones no pueden ser demasiado abiertas, dado que son las responsables de establecer las relaciones entre las ideas de los estudiantes y del profesor teniendo como referente los conocimientos matemáticos que, en definitiva, son los encargados de dinamizar las interacciones (Múniera, 2009).

También es característico de una situación problema contextualizar procesos de razonamiento que permiten particularizar, generalizar, conjeturar, verificar, utilizar algoritmos, formular y validar hipótesis.

La participación de los estudiantes en la construcción de aprendizajes desde un

enfoque problematizador les exige desplegar la actividad mental para poder poner en acción los saberes previos a partir de los cuales pueden iniciar procedimientos de exploración y sistematización de ideas matemáticas implícitas en la situación. Es decir, las situaciones problema dinamizan la actividad de los estudiantes, en la medida en que les orienta su modo de pensar en contextos particulares, apareciendo así procesos de razonamiento y de comunicación mediados por diferentes formas de representación de conceptos.

En dichas situaciones se generan espacios para el diálogo, la confrontación y la negociación de significados, entre estudiantes y profesores, desde los cuales surgen formas de representación que posibilitan modos de razonar y comunicar relaciones matemáticas. Un enfoque problematizador de las matemáticas involucran, de manera natural, procesos de comunicación mediados por los diferentes sistemas de representación utilizados por los estudiantes, permitiendo paulatinamente extender las redes conceptuales.

Las situaciones problema son encargadas de generar un espacio de interacción, de modo que los estudiantes dinamicen la actividad matemática desde diferentes negociaciones significativas, para comunicares desde conocimientos matemáticos contribuyendo a que se incremente la fluidez y la capacidad expresiva de los estudiantes para relacionarse con las ideas matemáticas.

Las situaciones problema pueden asumirse, entonces, como un instrumento de enseñanza y de aprendizaje que propicia, en los estudiantes, niveles de conceptualización y formas de simbolización de acuerdo con los significados para los conceptos que se van construyendo.

La situaciones problema se vuelve el medio para que se tejan nuevas relaciones - fundamentales en el proceso de construcción de conceptos- entre la triada: estudiante, profesor y conocimiento matemático. Es decir, cada uno de estos elementos asume un determinado rol en las actividades orientadoras de la construcción de aprendizaje.

El estudiante orienta sus acciones, desde sus saberes previos, hacia la construcción de estrategias para resolver las situaciones planteadas. Aquí sus modos de pensar se dinamizan para iniciar la construcción de significados para las ideas conceptuales implícitas y la negociación de los mismos con sus compañeros, lo que los pone en situación de debate y confrontación como pares. Es decir, en estos procesos, el

estudiante necesita usar niveles de representación y diferentes argumentos para comunicar sus resultados. Además, tiene la oportunidad de replantear sus ideas a través de procesos de autoevaluación y heteroevaluación. Aquí el logro a esperar es que el alumno alcance una nueva capacidad expresiva para sistematizar, con ayuda del docente, los nuevos conocimientos.

El docente cambia su rol protagónico respecto a la idea de ser el poseedor único del saber. El hecho de que una situación oriente la forma de pensar del estudiante, en cuanto a una serie de conceptos involucrados en las actividades, hace que el profesor deba transformar las relaciones con los conocimientos y los alumnos, en la medida en que deben acercarse al conocimiento de las condiciones cognitivas, sociales y culturales de sus estudiantes para poder diseñar situaciones problematizadoras de los conceptos. Es decir el docente se hace par del alumno, tejiendo una relación de corte dialógico, dado que las nuevas formulaciones y preguntas de los aprendices conllevan a una reconfiguración de los conocimientos que posee y a asumir otra actitud en el aula, de tal manera que oriente los procesos en función del aprendizaje, y no solo a través de procesos de enseñanza.

El conocimiento matemático ya no entra al aula desde una organización jerárquica y formal propia del saber científico, sino que ingresa de manera contextualizada, a través de diferentes formas de representación y de conexiones entre las mismas, que lo hace construirse con significados particulares de acuerdo con los contextos y las situaciones que lo generan. Es decir, el conocimiento matemático, desde las matemáticas podemos interpretarlo como una construcción social, consecuencia de procesos de actividad matemática en contextos sociales particulares. En este sentido, el conocimiento matemático, como sus formas de representación, no es externo a los sujetos que aprenden; por tanto, es una construcción social que también depende de los espacios que lo producen.

Así una alternativa metodológica fundamentada en la problematización del currículo contribuye a que los estudiantes participen en la construcción de los conocimientos matemáticos de manera significativa, en la medida en que van tejiendo diversas relaciones, a partir de diferentes formas de representación, en las que van apareciendo los contenidos y que se van consolidando, cada vez más, en una red conceptual que los dota de fluidez para comunicar ideas matemáticas.

6.3. Marco Conceptual y Disciplinar

Es muy frecuente iniciar a los alumnos en los conceptos de ecuación y solución de una ecuación mediante definiciones formales, enseñando su resolución a través de reglas que, aplicadas al pie de la letra, permiten obtener el valor de la incógnita. Pero por mucha destreza que se adquiriera, ésta puede que no vaya ligada a la adquisición de conceptos. De ahí que sea necesario tener presente tanto los conceptos de ecuación y de solución como las técnicas de resolución de ecuaciones.

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o variables, relacionados mediante operaciones matemáticas. Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes; los valores desconocidos pueden ser establecidos como resultado de otras operaciones. Las variables, representadas generalmente por letras, constituyen los valores que se pretende hallar.

Ejemplo 6.1 : *A un empleado de cierto almacene le pagan mensualmente un salario básico de \$300.000 y adicionalmente le dan una bonificación de \$2.000 por cada artículo que venda al mes. ¿Cuántos artículos deberá vender mensualmente para obtener un salario mensual de \$700.000?*

Solución:

Llamemos x = al número de artículos que debe vender mensualmente. Entonces debe satisfacerse que

$$300.000 + 2.000x = 700.000$$

Esta es una ecuación lineal con una incógnita: el número x de artículos que debe vender mensualmente es:

$$2.000x = 700.000 - 300.000$$

$$2.000x = 400.000$$

$$x = \frac{400.000}{2.000}$$

$$x = 200$$

Por tanto, el empleado debe vender 200 artículos al mes para obtener un salario mensual de 700.000 pesos.

Ejemplo 6.2 : Un “rebuscador” va con 110.000 pesos en monedas a un banco para que se los cambien por billetes de 20.000 y de 50.000 pesos. ¿Cuántos billetes de cada denominación recibirá?

Solución:

Sea x el número de billetes de 20.000 y y el número de billetes de 50.000. Entonces debe satisfacerse la siguiente ecuación lineal en dos variables (las variables x e y)

$$20.000x + 50.000y = 110.000$$

$$2x + 5y = 11$$

$$2x = 11 - 5y$$

Como $2x$ es par entonces $11 - 5y$ debe ser par, y como 11 es impar debe ser $5y$ impar (pues 11 menos un número par da impar) así que y debe de ser impar. Además como $2x \geq 0$ entonces $11 - 5y \geq 0$ de donde $5y \leq 11$ por tanto $y \leq \frac{11}{5}$; luego $y \leq 2$ y como y es impar tenemos que $y = 1$. Así

$$2x = 11 - 5(1) = 11 - 5 = 6$$

$$x = 3$$

Luego debe recibir un billete de 50.000 y 3 billetes de 20.000 pesos.

Ejemplo 6.3 *La montaña más alta de todas es el monte Everest en la cordillera del Himalaya. El aire en la cima del Everest, tiene una densidad tres veces inferior que a nivel del mar. Si la suma de las alturas del monte Everest y el volcán Kilimanjaro equivale a 14.744 metros y la altura del monte Everest es $3/2$ de la altura del Kilimanjaro, aumentado en 4 metros, encontrar las alturas en metros del monte Everest y el volcán Kilimanjaro.*

Solución:

Sea x = la altura del monte Everest y y = la altura del volcán Kilimanjaro. Entonces deben satisfacerse las siguientes ecuaciones:

$$x + y = 14.744 \quad (6.1)$$

$$x = \frac{3}{2}y + 4 \quad (6.2)$$

Que es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas o variables (x e y). Para solucionar el sistema basta con sustituir la variable $x = 3/2y + 4$ en la primera ecuación,

$$\left[\frac{3}{2}y + 4\right] + y = 14.744$$

$$\frac{5}{2}y + 4 = 14.744$$

$$\frac{5}{2}y = 14.744 - 4$$

$$\frac{5}{2}y = 14.740$$

$$y = \frac{14.740 \times 2}{5}$$

$$y = \frac{29.480}{5}$$

$$y = 5.896$$

Así, la altura del volcán Kilimanjaro es de 5.896 metros y la altura del monte

Everest es $x = 14.744 - y$, de donde

$$x = 14.744 - 5,896$$

$$x = 8.848 \text{ metros}$$

La igualdad planteada por una ecuación será cierta o falsa dependiendo de los valores numéricos que tomen ambos miembros; se puede afirmar entonces que una ecuación es una igualdad condicional, en la que sólo ciertos valores de las variables la hacen cierta. Se dice que una ecuación es lineal cuando en su representación matemática las variables están elevadas a la primera potencia y no se multiplican entre sí. Su representación geométrica es de la siguiente forma: Las ecuaciones lineales con 2 incógnitas representan una recta en el plano, si la ecuación lineal tiene 3 incógnitas, su representación gráfica es un plano en el espacio. (Skorniakov, 1986).

Un Sistema de Ecuaciones Lineales, también conocido como Sistema Lineal de Ecuaciones o simplemente Sistema Lineal: es una colección de una o más ecuaciones lineales que involucran las mismas variables. Es decir, un sistema de ecuaciones en donde cada ecuación es de primer grado. (Lay, 2007) La ecuación lineal es la más elemental de las ecuaciones y la más utilizada en la actividad diaria. Es la ecuación fundamental en casi todos los modelos de los procesos reales, naturales y sociales. Esta ecuación, representa los fenómenos en donde aparece la linealidad, por lo tanto, está presente en Problemas diversos que involucran la proporcionalidad directa.

La comprensión del concepto de ecuación es fundamental, porque aquí intervienen otros factores, como el concepto de variable de la ecuación, ya que se debe entender que las variables son cantidades mensurables que cambian, que pueden representar que los fenómenos cambian. Las variables por si solas no tienen importancia, sólo en relación con otras, en relación funcional. La tarea fundamental no es encontrar el valor de una variable x que satisfaga ciertas condiciones, lo esencial es analizar la relación entre x e y (dos variables) para distintos valores de x . Cuando se tiene claro este tipo de conexiones y se es capaz de percibir una relación directa, inversa o cuadrática, realmente se están identificando las relaciones estructurales de situaciones que están variando y sólo entonces es posible modelarlas.

Representación Gráfica de una Ecuación Lineal en una Variable: Se utiliza la recta numérica y su solución es un punto de ella.

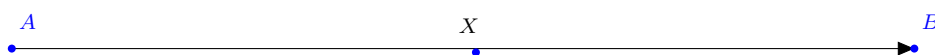


Figura 6.1: Solución de una ecuación lineal en una variable

Ejemplo 6.4 la solución a la ecuación $2x - 3 = 0$ es $2x = 3$ de donde $x = \frac{3}{2}$



Figura 6.2: Solución gráfica a la ecuación $2x - 3 = 0$

Representación Gráfica de una Ecuación Lineal en dos Variables: Para graficar una ecuación lineal existen varios métodos o formas; los métodos más utilizados son los siguientes:

1. Haciendo una tabla de valores para x y y .
2. Utilizando el plano cartesiano y calculando el intercepto en x y el intercepto en y .

Cuando al alumno se le enseña a graficar una ecuación lineal, se comete un error porque se le enseña todos los pasos o las formas de cómo graficar, pero no se le enseña que significado tiene la gráfica, la inclinación de la recta o pendiente.

De la pendiente podemos decir que es la razón de cambio entre los valores de y y los valores de x , es la inclinación de una recta; pero ¿Qué significa esa inclinación?

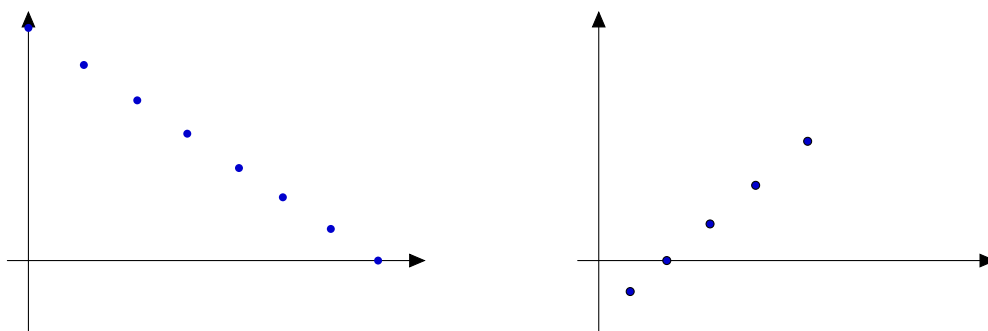
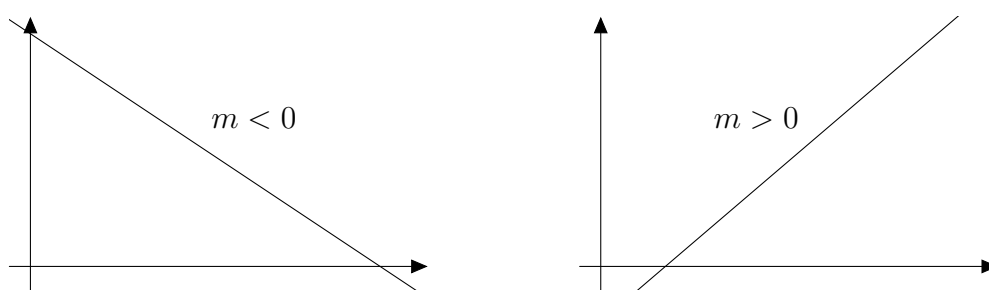


Figura 6.3: Solución de una ecuación lineal con dos variables

Figura 6.4: Gráficas de la ecuación $y = mx + b$ con m y b fijos

Analizando algunos modelos de enseñanza de las ecuaciones lineales puede observarse que éste proceso se inicia partiendo del concepto para luego llegar a la representación gráfica. El otro caso, que implica el uso de la representación gráfica como punto de partida para el análisis conceptual, es poco explorado en nuestro medio. Sin embargo a través de este tipo de abordaje podría lograrse un aprendizaje más significativo del concepto de ecuación lineal.

6.4. Marco Legal

El Marco Legal, en el que se sustenta el área de la matemática parte de los referentes a nivel normativo y curricular que direccionan el área.

En este caso se alude en primera instancia a la Constitución Nacional, estableciendo en el artículo 67, “la educación como un derecho fundamental de toda persona y un servicio público que tiene una función social, siendo uno de sus objetivos, la

búsqueda del acceso al conocimiento, a la ciencia, la técnica y a los demás bienes y valores de la Cultura”, por lo que el área de matemáticas no es ajena al cumplimiento de este.

Continuando, se presenta la Ley General de Educación (Ley 115 de 1994), la cual en sus artículos 21, 22 y 23 determina los objetivos específicos para cada uno de los ciclos de enseñanza en el área de matemáticas, considerándose como área obligatoria. De otro lado, el desarrollo del proceso educativo, también se reglamenta en el Decreto 1860 de 1994, el cual hace referencia a los aspectos pedagógicos y organizativos, resaltándose, concretamente en el artículo 14, la recomendación de expresar la forma como se ha decidido alcanzar los fines de la educación definidos por la Ley, en los que interviene para su cumplimiento las condiciones sociales y culturales, dos aspectos que sustentan el accionar del área en las instituciones educativas.

Luego, otro referente normativo y sustento del Marco Legal, es la Ley 715 de 2001, donde en su artículo 5, explica “la necesidad por parte de la Nación de establecer las Normas Técnicas Curriculares y Pedagógicas para los niveles de la educación preescolar, básica y media, sin que esto vaya en contra de la autonomía de las instituciones educativas y de las características regionales, y definir, diseñar y establecer instrumentos y mecanismos para el mejoramiento de la calidad de la educación, además, de dar orientaciones para la elaboración del currículo, respetando la autonomía para organizar las áreas obligatorias e introducir asignaturas optativas de cada institución”.

En concordancia con las Normas Técnicas Curriculares, es necesario hacer referencia a los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias, los cuales son documentos de carácter académico no establecidos por una norma jurídica o ley. Ellos hacen parte de los referentes que todo maestro del área debe conocer y asumir, de tal forma que el desarrollo de sus prácticas pedagógicas den cuenta de todo el trabajo, análisis y concertación que distintos teóricos han hecho con la firme intención de fortalecer y mejorar el desarrollo de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en los que se enmarca el área de matemáticas. A pesar de que son

directrices ministeriales, están sometidos a confrontaciones que propicien un mejoramiento significativo en la adquisición del conocimiento y en procura de la formación integral de las personas.

En cuanto a los Lineamientos Curriculares en matemáticas publicados por el MEN en [Ministerio de Educación Nacional – MEN, 1998], se exponen reflexiones referente a la matemática escolar, dado que muestran en parte los principios filosóficos y didácticos del área estableciendo relaciones entre los conocimientos básicos, los procesos y los contextos, mediados por las Situaciones Problemáticas y la evaluación, componentes que contribuyen a orientar, en gran parte, las prácticas pedagógicas del maestro y posibilitar en el estudiante la exploración, conjetura, el razonamiento, la comunicación y el desarrollo del pensamiento matemático.

Finalmente, los Estándares Básicos de Competencias, es un documento que aporta orientaciones necesarias para la construcción del currículo del área, permitiendo evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los estudiantes en el transcurrir de su vida estudiantil, además, presenta por niveles la propuesta de los objetos de conocimiento propios de cada pensamiento matemático, los cuales deben estar contextualizados en situaciones problémicas que son uno de los caminos que permiten un proceso de aprendizaje significativo en el estudiante.

Capítulo 7

Desarrollo de la Propuesta

7.1. Reconocimiento de Ideas Previas

La unidad de enseñanza comenzó con una Evaluación diagnóstica, de manera individual donde se entregó a cada estudiante el instrumento de indagación de ideas previas, el cual consta de 5 puntos. (Ver anexo A); después se realizó una socialización donde se discutieron todas las preguntas con el propósito de identificar realmente en qué estado se encuentran los estudiantes ante el tema y permitir que ellos comiencen a construir sus propios conceptos.

7.2. Construcción de Explicaciones

La segunda etapa de la unidad didáctica se divide en 3 partes:

- La primera parte son 9 secciones de clase magistral donde el docente explica los conceptos básicos para la solución de sistemas de ecuaciones con la participación del estudiante durante el desarrollo de las mismas.
- La segunda parte se desarrolla mediante una serie de actividades que relacionan las ecuaciones con la vida cotidiana que se desarrollaron al finalizar cada sección de clase.
- Y una tercera parte que consiste en un taller final donde se apliquen todos los conceptos aprendidos.

7.2.1. Todo lo que se Debe Saber sobre las Ecuaciones

Las solución de ecuaciones da sentido al que hacer del álgebra. Es el camino para hallar, con agilidad, la solución a problemas generales y específicos. Las ciencias naturales, las económicas y sociales, expresan sus leyes mediante ecuaciones. De este modo se puede encontrar resultados específicos conociendo algunos datos de una situación.

Los procedimientos empleados en álgebra son muy importantes, ya que permiten expresar relaciones en un lenguaje general, que puede representar diversas situaciones. Una vez que se ha establecido una ecuación que modela un problema, mediante la transformación en ecuaciones equivalentes, encontramos su respuesta.

Definición 7.1 *Cualquier afirmación matemática que utiliza el signo igual para establecer que dos expresiones algebraicas representan el mismo número o son equivalentes, se llama ecuación. Ejemplo*

$$ax + by + cz = d$$

donde a, b, c, d son números conocidos y x, y, z las cantidades desconocidas

Ejemplo 7.1 *En la ecuación $x + 4 = 10$, x es el término desconocido, variable o incógnita. Solucionar esta ecuación, es hallar el valor de la variable que satisface la igualdad. Así, en $x + 4 = 10$, el valor que hace que la igualdad sea verdadera es 6. Por lo tanto, la solución de la ecuación es $x = 6$.*

Propiedad Uniforme 7.1 *En una igualdad se puede sumar o restar el mismo número a los dos lados de la ecuación y ésta se conserva. Así mismo se puede multiplicar, dividir por el mismo número cada miembro siempre que tal número no sea nulo.*

Esta propiedad nos ayuda a resolver ecuaciones pues el conjunto solución de la ecuación original es el mismo que de la ecuación transformada siempre que los pasos realizados sean reversibles.

Ejemplo 7.2 *Resolvamos la ecuación $4x - 9 = 3$. Como se trata de despejar x , lo primero que se hace es poner en un miembro de la igualdad todas las expresiones*

que contengan la variable x y al otro miembro se pasan las expresiones que no la contienen. En este caso debemos dejar de un lado de la igualdad $4x$.

Solución:

Aplicando la propiedad uniforme para determinar el valor de x sumamos 9 a ambos lados y se obtiene

$$4x - 9 + 9 = 3 + 9;$$

de donde $4x = 12$ y dividiendo ambos lados por 4 se tiene que $x = 3$: por lo tanto la solución de la ecuación $4x - 9 = 3$ es $x = 3$.

Nótese que en \mathbb{R} la ecuación $4x - 9 = 3$, tiene como solución $x = 3$.

Aca \mathbb{R} es la recta real o el conjunto de los números reales. Gráficamente:

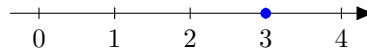


Figura 7.1: Representación gráfica de la solución a la ecuación lineal $4x - 9 = 3$

La solución de la misma ecuación $4x - 9 = 3$ en el plano cartesiano, \mathbb{R}^2 , es la recta vertical $x = 3$ pues para cualquier valor de y , $x = 3$. Gráficamente se representa así:

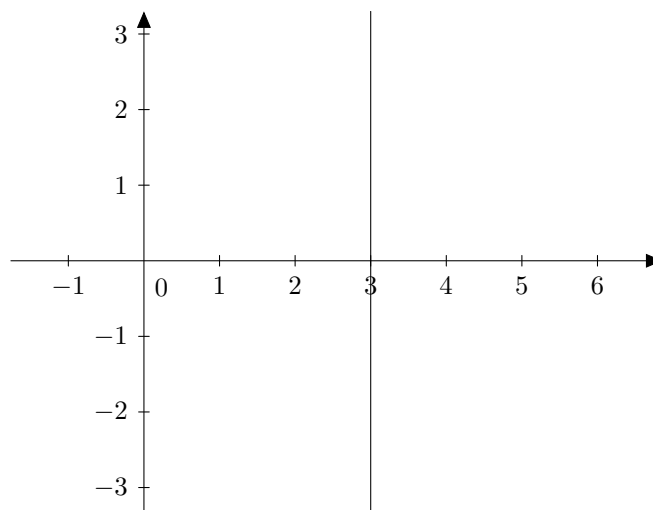


Figura 7.2: Representación gráfica de la solución a la ecuación $4x - 9 = 3$ en \mathbb{R}^2

En \mathbb{R}^3 , espacio, la ecuación $4x - 9 = 3$ es también $x = 3$ y se representa mediante un plano así:

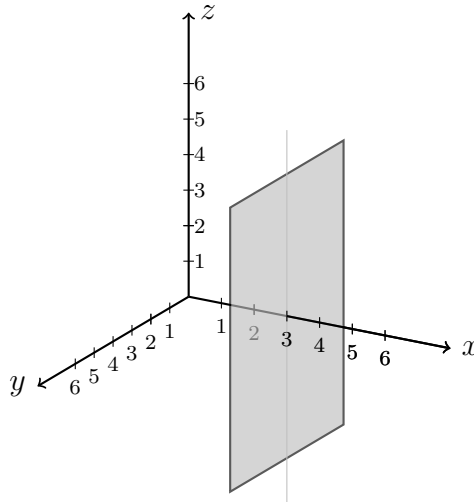


Figura 7.3: Solución gráfica de la ecuación $4x - 9 = 3$ en \mathbb{R}^3

Examinando el sistema de ecuaciones lineales más elemental, cuyo orden es de 1×1 y tiene la forma $ax = b$, observamos que puede ocurrir una de los tres casos siguientes:

- Tiene una única solución, cuando $a \neq 0$ y b es cualquier valor.
- No tiene solución, cuando $a = 0$ y $b \neq 0$.
- Tiene infinitas soluciones, cuando $a = 0$ y $b = 0$.

Geoméricamente la ecuación $ax = b$ se puede representar como un punto sobre la recta numérica (cuando tiene una solución) o por una recta numérica (cuando tiene infinitas soluciones).

Ejemplo 7.3 *En la Cafetería del Colegio venden el vaso de gaseosa a 600 pesos y empanadas a 400 pesos cada una. En una semana el total de ventas por estos dos artículos es de 240.000 pesos. ¿Cuántas gaseosas y cuántas empanadas fueron vendidas esa semana?*

Solución:

Lo primero que debemos hacer es representar algebraicamente este enunciado. Para esto llamemos con la letra x y la letra y lo que no conocemos del problema, es decir lo que me están preguntando.

x = Cantidad de gaseosas vendidas esa semana,

y = Cantidad de empanadas vendidas esa semana.

Luego establezco la relación entre las cantidades vendidas de gaseosas y de empanadas.

$$600x + 400y = 240.000 \quad (7.1)$$

Para solucionar esta ecuación primero simplificamos dividiendo cada miembro de la igualdad por 100, luego se despeja y , y por ultimo se asignan valores enteros positivos a x . De esta forma se obtienen valores enteros positivos de y . Así:

$$600x + 400y = 240.000$$

$$6x + 4y = 2.400$$

$$4y = 2.400 - 6x$$

$$y = \frac{2.400 - 6x}{4}$$

$$y = 600 - \frac{3x}{2}$$

Obtenemos una función lineal con pendiente $-3/2$ lo que nos muestra que por cada 2 gaseosas que se vendan se dejan de vender 3 empanadas. Gráficamente.

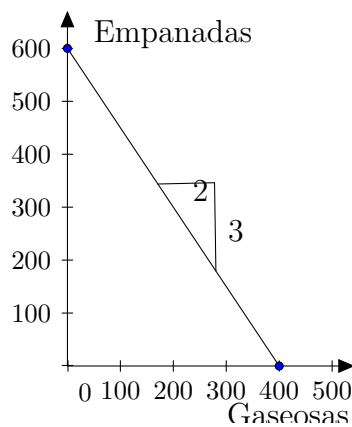


Figura 7.4: Solución gráfica de la ecuación $6x + 4y = 2.400$

Nótese que si x pasa de x a $x+1$ la y pasa de $y = 600 - \frac{3}{2}x$, a $y = 600 - \frac{3}{2}(x+1)$ así que y disminuye:

$$600 - \frac{3}{2}x - (600 - \frac{3}{2}(x+1)) = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = +\frac{3}{2}$$

Por tanto si x aumenta en 1 la y disminuye en $3/2$. Usando semejanza de triángulos, si x aumenta en 2 unidades, la y disminuye en 3.

Observación:

De $y = 600 - \frac{3}{2}x$ se obtiene que x debe ser un número par pues y pertenece a los números naturales. Además como $y > 0$, debe cumplirse que

$$\begin{aligned} 600 - \frac{3}{2}x &> 0 \\ 600 &> \frac{3}{2}x \\ 1.200 &> 3x \\ x &< 400 \end{aligned}$$

De donde se puede concluir que x debe ser par y menor a 400.

Ahora de $6x + 4y = 2.400$, o sea de $3x + 2y = 1.200$, se obtiene:

$$\begin{aligned} 3x &= 1.200 - 2y \\ x &= 400 - \frac{2}{3}y \end{aligned}$$

Luego y debe ser múltiplo de 3 pues x pertenece a los números Naturales. Además de $x > 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
 400 - \frac{2}{3}y &> 0 \\
 400 &> \frac{2}{3}y \\
 1.200 &> 2y \\
 y &< 600
 \end{aligned}$$

Luego y debe ser múltiplo de 3 menor a 600.

Por ejemplo: Si $y = 600$, como $3x + 2y = 1.200$ entonces $3x = 1.200 - 2(600)$ de donde $3x = 0$, por lo tanto $x = 0$ lo que quiere decir que no se vendieron gaseosas.

Si $y = 300$, entonces $3x + 2(300) = 1.200$ por lo tanto $3x = 600$ de donde $x = 200$ o sea que si se vendieron 300 empanadas entonces se vendieron 200 gaseosas.

De todo lo anterior podemos concluir que el conjunto de soluciones esta formado por las parejas de enteros no negativos sobre el segmento de recta dibujado con abscisa par y ordenada un múltiplo no negativo de 3.

Definición 7.2 *Un conjunto formado por dos o más ecuaciones lineales es llamado sistema de ecuaciones lineales o sistema de ecuaciones simultáneas. Resolver el sistema de ecuaciones lineales es el proceso por el cual encontramos el valor o los valores de las variables que satisfacen simultáneamente a las ecuaciones del sistema.*

Por ejemplo

$$2x + y = 1 \tag{7.2}$$

$$x - y = 5 \tag{7.3}$$

es un sistema de 2×2 ya que esta formado por dos ecuaciones con dos incógnitas. La solución de este sistema es la pareja ordenada $(2, -3)$ ya que esta pareja ordenada satisface las dos ecuaciones simultáneamente.

El conjunto

$$3x - 2y + 3z = 16 \quad (7.4)$$

$$x + 3y - 6z = -23 \quad (7.5)$$

$$5x + 4y - 2z = -9 \quad (7.6)$$

es un sistema 3×3 , pues está formado por tres ecuaciones con tres incógnitas. La solución de este sistema esta dado por la terna $(1, -2, 3)$ pues:

$$3(1) - 2(-2) + 3(3) = 16 \quad (7.7)$$

$$(1) + 3(-2) - 6(3) = -23 \quad (7.8)$$

$$5(1) + 4(-2) - 2(3) = -9 \quad (7.9)$$

7.2.2. Métodos para solucionar Sistemas de Ecuaciones

Resolver un sistema de ecuaciones lineales 2×2 consiste en hallar los valores de x y de y que satisfacen las dos ecuaciones a la vez.

Definición 7.3 *Una solución del sistema lineal*

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (7.10)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad (7.11)$$

es un par ordenado (x, y) cuyas coordenadas satisfacen ambas ecuaciones.

Una manera de resolver un sistema de ecuaciones lineales 2×2 es por el método gráfico, que consiste en representar los dos rectas en el mismo plano cartesiano, de donde podemos obtener lo siguiente:

- Si las rectas se cortan en un solo punto, el sistema tiene única solución, y decimos que el sistema es consistente.

- Si las rectas son paralelas y diferentes, el sistema no tiene solución, y decimos que el sistema es inconsistente.
- Si las rectas son iguales, el sistema tiene infinitas soluciones, y decimos que el sistema es dependiente.

Geoméricamente para la solución de un sistema 2×2 tenemos:

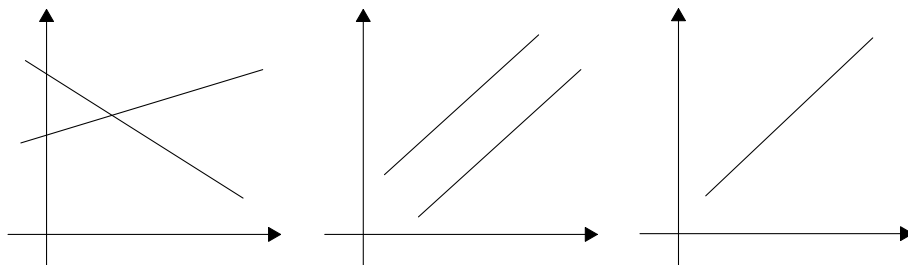


Figura 7.5: Posibles soluciones para un sistema 2×2

Ejemplo 7.4 Método Gráfico

Un zootecnista que se encarga de preparar una dieta de engorde para pollos, determina que éstos necesitan 20g de proteína y 6g de grasa y cuenta con dos tipos de alimentos: El primero contiene 20% de proteína y 2% de grasa y el segundo contiene 10% de proteína y 6% de grasa. ¿Cuántos gramos de cada alimento deberá mezclar para obtener la dieta necesaria?

Solución:

TABLA 1. Dieta de engorde para pollos

	Alimento Tipo I	Alimento Tipo II	Dieta
Proteína	$\frac{20}{100}$	$\frac{10}{100}$	20 g
Grasa	$\frac{2}{100}$	$\frac{6}{100}$	6 g

Sean x cantidad en gramos del alimento tipo I, e y cantidad en gramos del alimento del tipo II.

Se trata de resolver el sistema

$$\frac{20}{100}x + \frac{10}{100}y = 20$$

$$\frac{2}{100}x + \frac{6}{100}y = 6$$

Es decir,

$$20x + 10y = 2000$$

$$2x + 6y = 600$$

De donde

$$2x + y = 200$$

$$2x + 6y = 600$$

Por tanto

$$5y = 400$$

$$y = 80$$

Así,

$$2x + 80 = 200$$

$$2x = 120$$

$$x = 60$$

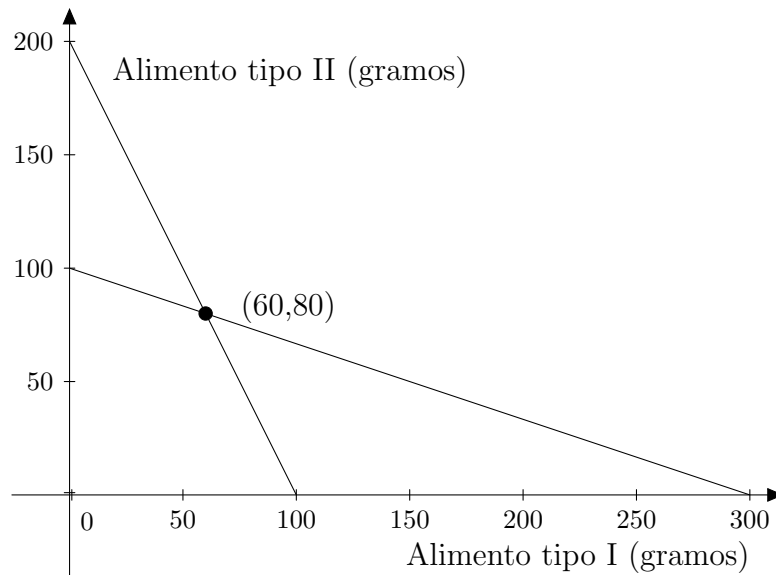
Luego debe mezclar 60g del alimento tipo I y 80g del alimento tipo II

Ejemplo 7.5 Método de Sustitución:

Con dos camiones cuyas capacidades de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión?

Solución:

Supongamos que x es la cantidad de viajes que realizó el primer camión, mien-

Figura 7.6: Solución gráfica para el sistema 2×2

tras que y es la cantidad de viajes que realizó el segundo camión; algebraicamente tenemos que:

Como la cantidad de viajes del primer camión es x entonces la madera transportada por el primer camión es $3x$ toneladas. Análogamente como la cantidad de viajes del segundo camión es y entonces la madera transportada por el segundo camión es $4y$ toneladas

Así, el total de viajes que realizaron los dos camiones es:

$$x + y = 23$$

Y el total de madera transportada por los dos camiones es

$$3x + 4y = 80$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones que debemos resolver es:

$$3x + 4y = 80 \quad (7.12)$$

$$x + y = 23 \quad (7.13)$$

Para solucionar el sistema primero despejemos x de la ecuación 7.13 de donde

$$x = 23 - y$$

Luego sustituyo $x = 23 - y$ en la ecuación 7.12, así

$$3(23 - y) + 4y = 80$$

$$69 - 3y + 4y = 80$$

$$69 + y = 80$$

$$y = 11$$

Así:

$$x = 23 - 11$$

$$x = 12$$

De donde podemos concluir que el primer camión realiza 12 viajes y transporto $3(12) = 36$ toneladas de madera, mientras que el segundo camión realizó 11 viajes y transporto $4(11) = 44$ toneladas de madera. La solución es el par ordenado $(12, 11)$ ya que satisface las dos ecuaciones.

Para verificar que la solución es cierta, reemplazamos los valores de y y x en las dos ecuaciones para verificar la igualdad

$$\begin{aligned}
 x + y &= 23 \\
 12 + 11 &= 23 \\
 3x + 4y &= 80 \\
 3(12) + 4(11) &= 80 \\
 36 + 44 &= 80
 \end{aligned}$$

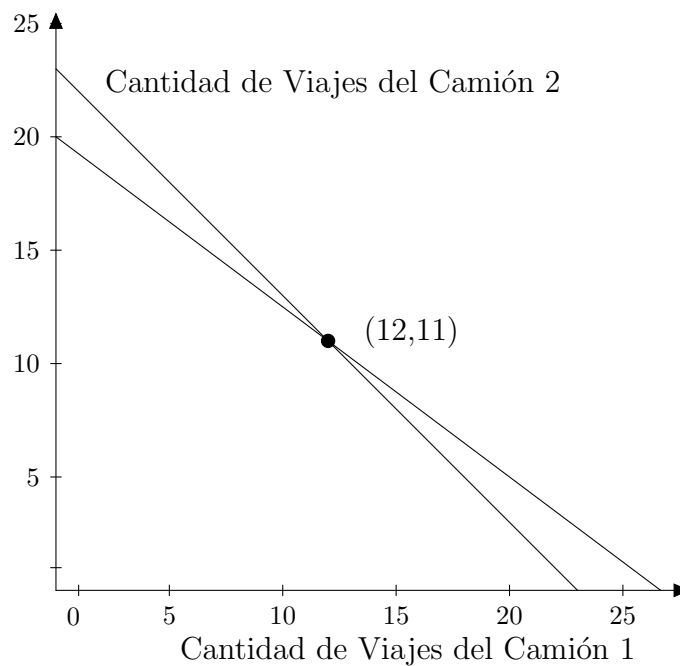


Figura 7.7: Solución gráfica para el sistema 2×2

Ejemplo 7.6 *Método de Igualación:*

Felipe y Yurany hacen paletas de Chocolate para el proyecto de aula en el área de Tecnología. La materia prima necesaria para hacer cada paleta grande cuesta \$500 y para hacer cada paleta pequeña \$300. Si disponen de \$57,000 y quieren hacer 150 paletas, ¿Cuántas paletas de cada tamaño deben hacer?.

Solución: Llamemos x la cantidad de paletas pequeñas, y la cantidad de paletas grandes, que pueden hacer.

Como disponen de 57,000 pesos debe satisfacerse $300x + 500y = 57.000$. Así el sistema que se debe solucionar es:

$$x + y = 150 \quad (7.14)$$

$$300x + 500y = 57.000 \quad (7.15)$$

Para solucionar el sistema primero despejemos la variable x de ambas ecuaciones. De la ecuación ?? tenemos

$$x = 150 - y$$

Y de la ecuación ?? resulta que $300x + 500y = 57,000$ es equivalente a

$$3x + 5y = 570$$

$$3x = 570 - 5y$$

$$x = \frac{570 - 5y}{3}$$

$$x = 190 - \frac{5}{3}y$$

Ahora igualamos las dos ecuaciones

$$150 - y = 190 - \frac{5}{3}y$$

$$-y + \frac{5}{3}y = 190 - 150$$

$$\frac{2}{3}y = 40$$

$$2y = (40) \times 3$$

$$y = \frac{120}{2}$$

$$y = 60$$

Ahora como $x = 150 - y$ y sustituyendo $y = 60$ de donde $x = 150 - 60$ es decir $x = 90$. Así podemos concluir que Felipe y Yurany pueden hacer 60 paletas grandes y 90 paletas pequeñas para su proyecto de aula.

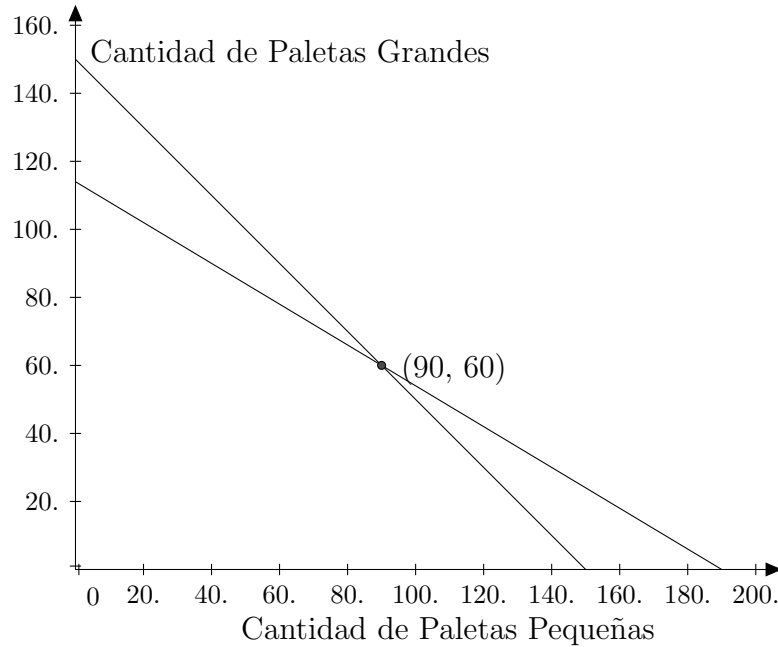


Figura 7.8: Solución gráfica para el sistema 2×2

Ejemplo 7.7 Método de Reducción:

Una tableta de la marca A, además de otras sustancias, contiene 10mg de hierro y 20 unidades de cierta proteína. Otra tableta, de la marca B, contiene 35mg de hierro y 50 unidades de la misma proteína (además de otras sustancias). ¿Cuántas pastillas diarias de cada marca tendría que ingerir un paciente al que se le recetó el consumo de 100mg de hierro y 160 unidades de esa proteína diariamente?.

Solución: Sean $x =$ el número de tabletas de la marca A.
 $y =$ el número de tabletas de la marca B.

TABLA 2.

	A	B	Consumo Total
Hierro	10mg	35mg	100mg
Proteína	20unidades	50unidades	160proteína

Como cada tableta de la marca A contiene 10mg de hierro entonces x tabletas contendrán $10x$ mg de hierro.

Como cada tableta de la marca B contiene 35mg de hierro entonces y tabletas contendrán $35y$ mg de hierro.

Como el paciente ingiere x tabletas de la marca A y y tabletas de la marca B , al día, entonces el total de mg de hierro que ingiere es $10x + 35y$ y este debe ser 100mg según la receta. Luego debe satisfacerse $10x + 35y = 100$.

Ahora, como cada tableta de la marca A contiene 20 unidades de cierta proteína entonces x tabletas contendrán $20x$ unidades de esa proteína. Análogamente y tabletas de la marca B contienen $50y$ unidades de la misma proteína y entonces diariamente ingerirá $20x + 50y$ unidades de esa proteína y en consecuencia se debe satisfacer $20x + 50y = 160$ según la receta. Así que se trata de resolver el sistema

$$10x + 35y = 100 \quad (7.16)$$

$$20x + 50y = 160 \quad (7.17)$$

dividiendo por 5 la primera ecuación y por 10 la segunda ecuación obtenemos:

$$2x + 7y = 20 \quad (7.18)$$

$$2x + 5y = 16 \quad (7.19)$$

Restando estas dos ecuaciones obtenemos $2y = 4$ de donde $y = 2$.

Ahora para encontrar el valor de x despejamos esta variable en cualquiera de las ecuaciones. En este caso la despejo de la segunda ecuación:

$$2x + 5y = 16$$

$$2x = 16 - 5y$$

$$x = \frac{16 - 5y}{2}$$

y sustituyendo la variable y por 2 obtenemos

$$x = \frac{16 - 5(2)}{2}$$

$$x = \frac{16 - 10}{2}$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

Así, el paciente debe ingerir 3 pastillas de la marca A y dos pastillas de la marca B, para cumplir con los requerimientos

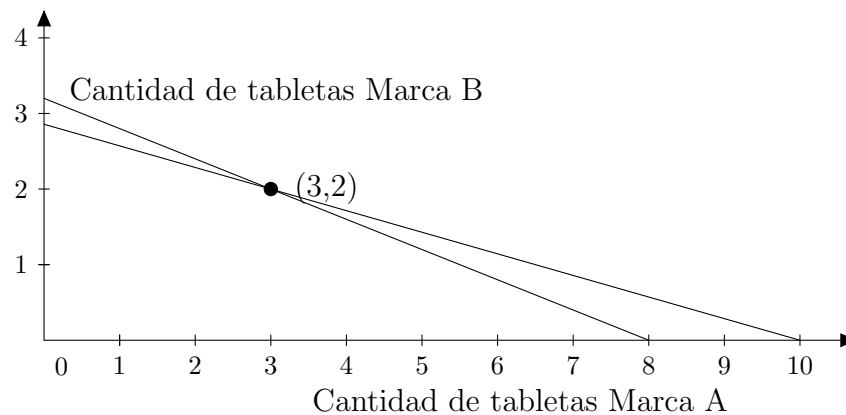


Figura 7.9: Solución gráfica para el sistema 2×2

7.2.3. Sugerencias a la hora de realizar ejercicios

Siempre que vamos a resolver una situación problema es conveniente hacernos una serie de preguntas que nos sirvan de guía para hallar la solución. Preguntas como:

- ¿Qué trato de encontrar?

- ¿Qué datos desconozco?
- ¿Qué datos conozco?
- ¿He resuelto algún problema similar?

Después es necesario generar y llevar a cabo un plan para solucionar el problema. Algunas estrategias pueden ser:

- Hacer un diagrama.
- Buscar un patrón.
- Hacer una tabla.
- Hacer una lista organizada.

Contexto de los Sistemas de Ecuaciones Lineales:

Los sistemas de dos ecuaciones sirven para determinar el valor de dos datos desconocidos, llamados variables o incógnitas, conocidas dos relaciones entre ellas. Los sistemas determinan la intersección entre dos rectas de ahí su utilidad geométrica.

Análisis de Situaciones:

A continuación se enumeran situaciones en las que pueden aparecer problemas que se resuelven con ecuaciones o sistemas de ecuaciones.

- Situación pública:

En el fin de semana, las atenciones de un servicio de urgencias fueron un 40 % de las ocurridas en toda la semana. Si en dicho fin de semana se produjeron 240 atenciones. ¿Cuál es el balance total de atenciones esa semana?

Planteamiento de la situación:

Llamemos x = número total de atenciones esa semana. Por tanto la ecuación que debemos resolver es:

$$0.4x = 240$$

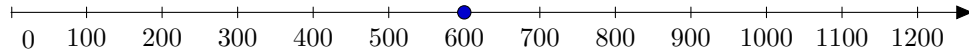


Figura 7.10: Solución gráfica de la ecuación $0.4x = 240$

Se sabe que entre los dos partidos políticos mayoritarios suman 269 diputados, y a uno de ellos le faltan 40 para tener el doble que el otro. ¿Cuántos diputados tienen cada partido?

Planteamiento de la situación:

Llamamos x =Cantidad de diputados partido A y y =cantidad de diputados partido B, así las ecuaciones que debemos resolver son:

$$x + y = 269$$

$$x + 40 = 2y$$

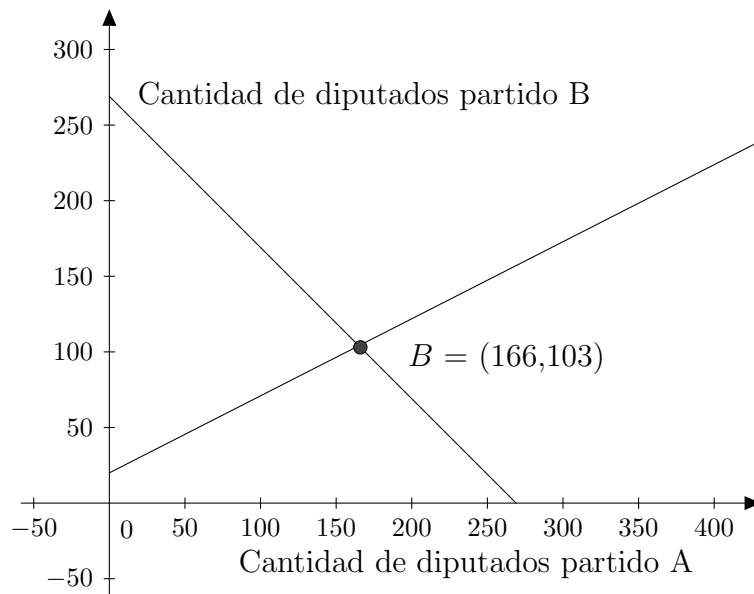


Figura 7.11: Solución gráfica para el sistema 2×2

- Situación laboral:

A Juan le han pagado por trabajar 20 días \$720.000 y sabe que antes de pagarle, le han descontado \$80.000 de salud. ¿Cuánto gana Juan por día?

Planteamiento de la situación:

Llamemos x =Cantidad de dinero que gana Juan por día, por lo tanto

$$20x - 80.000 = 720.000$$

es la ecuación que se debe resolver para solucionar la situación.

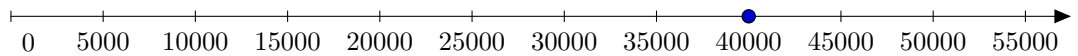


Figura 7.12: Representación gráfica para la solución de la ecuación $2x - 8.000 = 72.000$

La semana pasada Antonio y Sergio ganaron entre los dos \$850.000 trabajando 40 y 30 horas respectivamente, y la anterior ganaron \$900.000 trabajando 30 y 40 horas respectivamente. ¿Cuánto ganan por hora Antonio y Sergio?

Planteamiento de la situación:

Llamemos x =La cantidad de dinero que gana Antonio por una hora de trabajo, y y =la cantidad de dinero que gana Sergio por una hora de trabajo, luego el sistema de ecuaciones que se debe resolver es

$$40x + 30y = 850.000$$

$$30x + 40y = 900.000$$

■ Situación Médica:

Para producir $50mg$ de un medicamento en un laboratorio, se necesitan $15mg$ de un compuesto A y el resto de un producto que tenemos en dosis de $5mg$.

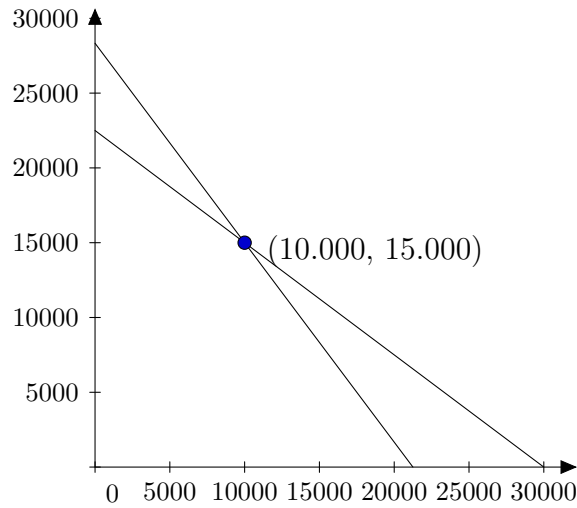


Figura 7.13: Solución gráfica para el sistema 2×2

¿Cuántas dosis necesitamos para que la mezcla salga bien?

Planteamiento de la situación:

Llamemos x =cantidad de dosis del producto que se tiene en dosis de $5mg$,

$$5x + 15 = 50$$

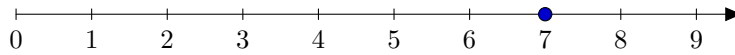


Figura 7.14:

- Situación Astronómica: Un astrónomo ha calculado que en una galaxia cercana hay el triple de planetas que en la nuestra y se sabe que entre las dos suman 800 millones ¿Cuántos planetas tiene nuestra galaxia?. Expresa el resultado en miles de millones.

Planteamiento de la situación:

Llamemos x =cantidad de millones planetas de nuestra galaxia, y =cantidad de millones de planetas de la otra galaxia, por lo tanto

$$\begin{aligned} 3x &= y \\ x + y &= 800 \end{aligned}$$

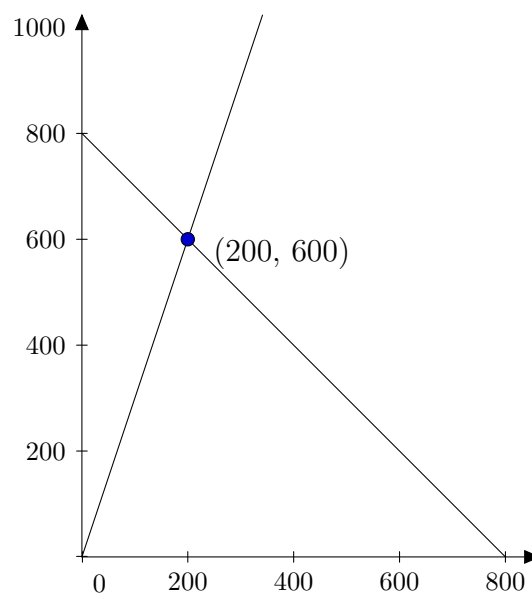


Figura 7.15: Solución gráfica para el sistema 2×2

■ Situación personal:

Comprando dos kilos de naranjas más uno de uvas he gastado lo mismo que ayer al comprar un kilo de naranjas más un melón. Si las uvas valen \$1.000 el kilo y cada melón \$1.500 ¿Cuánto vale el kilo de naranjas?

Planteamiento de la situación:

Llamemos x =precio del kilo de naranjas

$$2x + 1.000 = x + 1.500$$

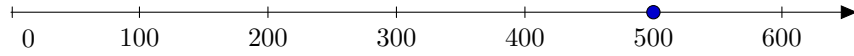


Figura 7.16: Representación gráfica para la ecuación $x = 500$

Antonio quiere hacerse socio de un gimnasio y estudia dos ofertas. En el gimnasio A tiene que pagar \$5.000 por hacerse el carnet y \$200.000 por cada mes. Por otro lado, en el gimnasio B paga 50.000 por el carnet y cada mes le cuesta \$150.000 ¿A qué gimnasio le conviene afiliarse Antonio?

Planteamiento de la situación:

Sea x =al número de meses en el gimnasio A o B; y y = al costo o tarifa en los gimnasios ;

$$200.000x + 5.000 = y$$

$$150.000x + 50.000 = y$$

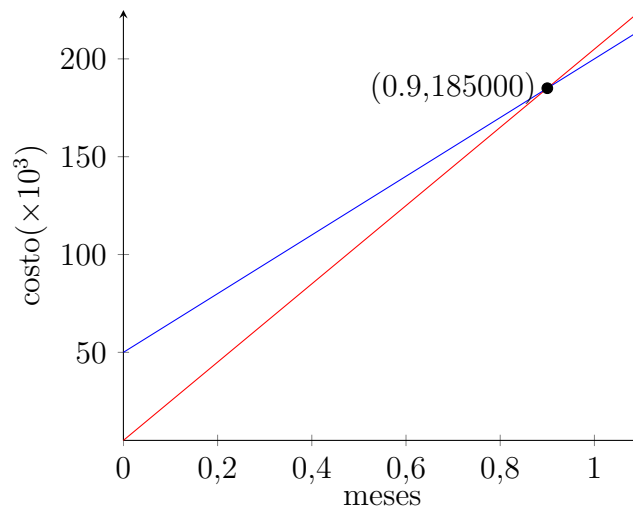


Figura 7.17: Solución gráfica para el sistema 2×2

Así

$$200x + 5 = \frac{y}{1000}$$

$$150x + 50 = \frac{y}{1000}$$

Utilizando el método de igualación obtenemos que

$$\begin{aligned} 200x + 5 &= 150x + 50 \\ 200x - 150x &= 50 - 5 \\ 50x &= 45 \\ x &= \frac{45}{50}x &= \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Y como $\frac{9}{10}$ de un mes son

$$\frac{9}{10} \times 30 = 27 \text{ días}$$

Entonces a Antonio le conviene el gimnasio B.

Ejemplo 7.8 *Para adoptar a un niño, una persona debe ser mayor de 25 años, y la diferencia de edad entre adoptante y adoptado debe ser mayor de 14 años. Supongamos que Patricia tiene intención de adoptar a Yurany y al hermano de esta. Patricia tiene 32 años, y hace cinco Yurany tenía la octava parte de la edad actual de Patricia más la mitad de la edad que tenía Camilo, su hermano. Sabiendo que hace cinco años Camilo tenía dos años menos que Yurany. ¿Puede Patricia adoptar a Yurany y a su hermano?*

Solución: Primero veamos qué datos conocemos, cuales son desconocidos, y asignemos la incógnita x a un dato desconocido y relacionamos dicho dato con los demás, es decir, primero estudiamos las condiciones del problema a resolver.

Datos desconocidos: Edad de Yurany y edad de su hermano.

Datos conocidos: Edad de Patricia (32 años), diferencia de edad entre adoptante y adoptado (mínima 14 años).

Llamemos $x =$ edad actual de Yurany.

Como ahora las condiciones que se dan son de 5 años atrás hay que buscar las

expresiones algebraicas asociadas:

$$\text{Edad de Yurany (hace 5 años)} = x - 5$$

$$\text{Edad de Camilo (hace 5 años)} = (x - 5) - 2$$

Ahora encontramos la ecuación resultante de aplicar las condiciones dadas en el enunciado:

$$\text{Edad de Patricia hace 5 años} = 32 - 5 = 27, \text{ luego}$$

$$x - 5 = \frac{32}{8} + \frac{(x - 5) - 2}{2}$$

Ahora se puede simplificar la ecuación reduciendo términos semejantes para resolverla y después verificar la solución para ver si es válido el modelo.

$$x - 5 = 4 + \frac{(x - 7)}{2}$$

$$x - 5 = \frac{8 + x - 7}{2}$$

$$2(x - 5) = x + 1$$

$$2x - 10 = x + 1$$

$$2x - x = 1 + 10$$

$$x = 11$$

Solución de la ecuación:

$$x = 11$$

Ahora con las condiciones anteriores determinamos los datos que necesitamos para responder a la pregunta.

- Edad de Yurany $x = 11$ años.

- Edad de Camilo (hace 5 años) = $11 - 7 = 4$ años.
- Edad de Camilo = $4 + 5 = 9$ años.
- Diferencia de edad entre Patricia y Yurany = $32 - 11 = 21$ años.
- Diferencia de edad entre Patricia y Camilo = $32 - 9 = 23$ años.

Por lo tanto como las diferencias superan los 14 años Patricia puede adoptar a los dos hermanos.

7.2.4. Más sobre Ecuaciones

Ejemplo 7.9 Dos empresas A y B de telefonía móvil tienen las siguientes tarifas por cada celular:

Tarifa de la empresa A: Un costo fijo mensual de 35.000 pesos por una hora o menos de telefonía mas 700 pesos por minuto adicional.

Tarifa de la empresa B: Un costo fijo mensual de 40.000 pesos por una hora o menos de telefonía mas 600 pesos por minuto adicional.

En que momento las tarifas coinciden?

Solución: Sea t el tiempo en minutos de telefonía utilizados en un celular.

De acuerdo con el enunciado del problema, si $0 \leq t \leq 60$, entonces las tarifas no coinciden.

Si $t > 60$, la tarifa que se paga en la empresa A es:

$$35.000 + (t - 60)700$$

y la tarifa que se paga en la empresa B es:

$$40.000 + (t - 60)600$$

Así que las tarifas coinciden cuando t sea tal que

$$35.000 + (t - 60)700 = 40.000 + (t - 60)600$$

esto es cuando

$$35.000 + 700t - 42.000 = 40.000 + 600t - 36.000$$

Es decir cuando

$$700t - 600t = 4.000 + 7.000$$

$$100t = 11.000$$

o sea, cuando

$$t = 110$$

Gráficamente, tenemos

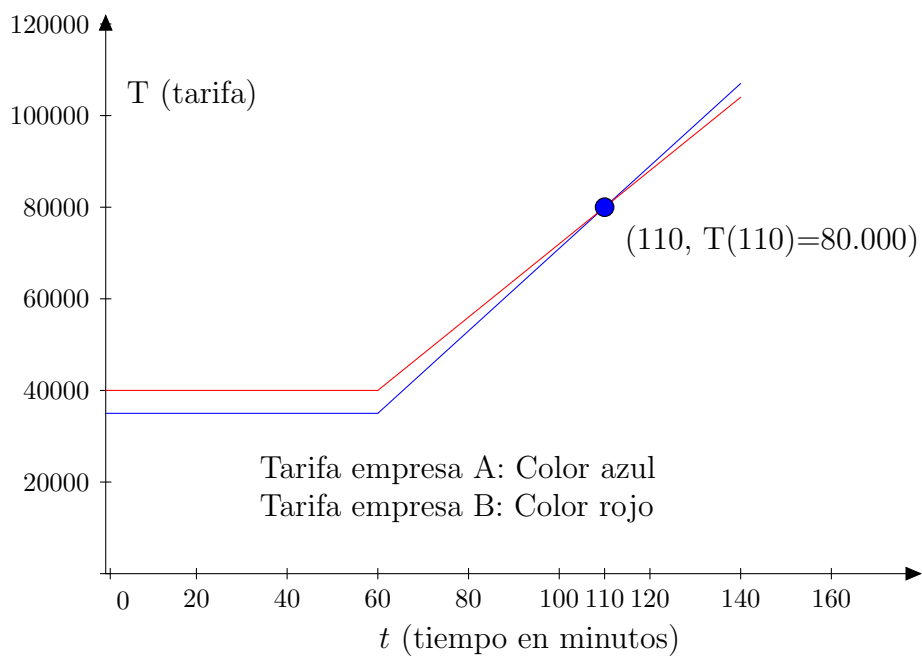


Figura 7.18: Solución gráfica para el sistema 2×2

Donde podemos observar que la empresa A es más beneficiosa antes de 110 minutos, pero si el gasto mensual en minutos es mayor a 110 es más conveniente tener un plan con la empresa B.

Observación

Si al resolver un sistema lineal

$$a_1x + b_1y = c_1 \tag{7.20}$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \tag{7.21}$$

donde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ constantes con a_1 o b_1 no nulos y a_2 o b_2 no nulos, sustituimos la x por el parámetro t , que denota tiempo y si la y denota distancia, su solución equivale a encontrar el instante t en el cual se encuentran las dos trayectorias rectilíneas. O lo que es lo mismo, encontrar el momento en que dos móviles que se desplazan por dos caminos rectilíneos se encuentran o han recorrido la misma distancia. Pues si $x = t$ el sistema quedaría:

$$y = \frac{-a_1}{b_1}t + \frac{c_1}{b_1} \tag{7.22}$$

$$y = \frac{-a_2}{b_2}t + \frac{c_2}{b_2} \tag{7.23}$$

Igualando las y , se encuentra t y luego reemplazando en una de las dos ecuaciones, se encuentra la distancia y . Ver figura

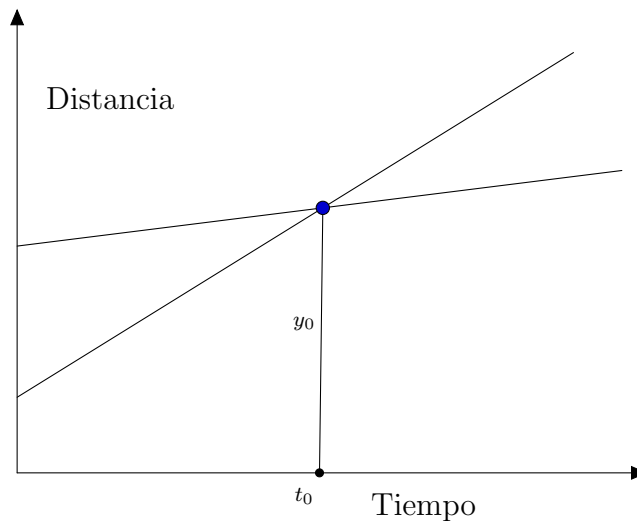


Figura 7.19: Solución gráfica para el sistema 2×2

Ejemplo 7.10 Un automóvil va por un camino horizontal a una velocidad de 60 km/h se encuentra otro camino con 10% de pendiente. Si mantiene esa velocidad, ¿Cuántos kms habría subido con respecto al camino horizontal al cabo de una hora?

Ayuda: Si tiene una pendiente del 10%, esto significa que por cada 100km de recorrido horizontal sube el 10% de 100km. Así como la pendiente

$$m = \frac{y}{x} = \frac{10}{100}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{10}$$

$$y = \frac{1}{10}x$$

Luego

$$60^2 = x^2 + y^2$$

$$3.600 = x^2 + \frac{x^2}{100}$$

$$3.600 = \frac{101}{100}x^2$$

$$x^2 = \frac{360.000}{101}$$

$$x = \sqrt{\frac{360.000}{101}}$$

Por lo tanto

$$y = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{360.000}{101}}$$

$$y = \frac{600}{10\sqrt{101}}$$

$$y = \frac{60}{\sqrt{101}} \text{ km}$$

Ejemplo 7.11 A continuación se dan las gráficas de las tarifas de telefonía fija de

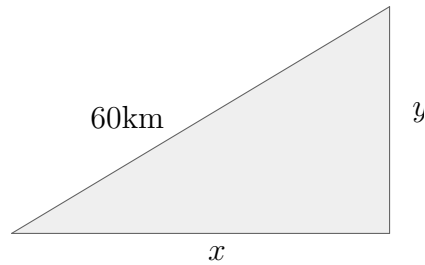


Figura 7.20:

acuerdo con los minutos consumidos al mes.

- ¿Si una persona consume al mes entre 90 y 200 minutos cuál telefonía le conviene más?
- ¿Cuál telefonía es más conveniente si se consume máximo hasta 1 hora?
- ¿En qué momento los costos en las dos telefonías son los mismos?

Ayuda: Hay tres momentos.

- a) Del gráfico se observa que cuando se consume 120 minutos el costo común es de \$9.000.
- b) Para hallar el primer momento se halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos (60, 300) y (120, 9.000) que es:

$$y - 300 = \frac{9.000 - 3.000}{120 - 60}(x - 60)$$

$$y - 3.000 = 100(x - 60) \quad y - 3.000 = 100x - 6.000$$

Por lo tanto

$$y = 100x - 3.000$$

luego para

$$y = 5.400$$

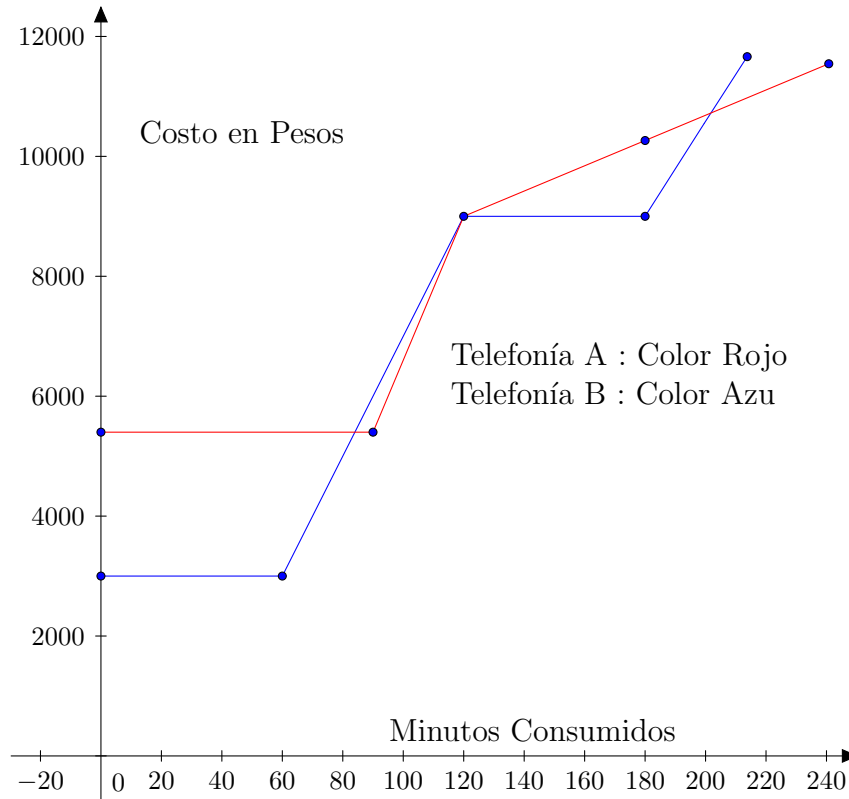


Figura 7.21: Costos Telefonía Fija

tenemos que

$$5.400 = 100x - 3.000$$

$$8.400 = 100x$$

$$x = 84$$

Es decir a los 84 minutos.

- c) Para hallar el costo del tercer y último momento que corresponde al consumo de 200 minutos se halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos (120, 9.000) y (180, 10.000) y se cambia la x por 200. Al despejar y ese será el costo.
- ¿Si se consume más de 200 minutos mensuales, cual es la telefonía más económi-

ca?

- ¿Después de consumir más de 200 minutos, cuantos pesos aumenta el costo cada minuto en cada una de las telefonías? **Ayuda:** Se trata de hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(120, 9.000)$ y $(180, 10.000)$ y la pendiente de la recta que pasa por $(180, 9.000)$ y el punto de intersección de la recta anterior con la recta de ecuación $x = 200$.

7.3. Evaluación De la Unidad Didáctica

La evaluación de la unidad didáctica, se realizó mediante una taller final y una prueba escrita, los estudiantes iban resolviendo las diferentes situaciones propuestas, evidenciando el grado de dominio que cada uno había alcanzado en el tema. (Ver Anexo J.)

Capítulo 8

Descripción de la Implementación

8.1. Reconocimiento de Ideas Previas

Antes de implementar la primera actividad, en una sesión de clase que podemos denominar cero, se compartió con los estudiantes cada uno de los objetivos de aprendizaje y las pautas que les permitirían determinar qué capacidades debían lograr para poder alcanzarlos. También se les dio a conocer los criterios de evaluación junto con una presentación general de lo que se trabajaría durante las 10 secciones.

En la primera sección de clase se realizó la prueba diagnóstica evidenciando que los estudiantes no tenían comprensión conceptual sobre los parámetros matemáticos de las ecuaciones lineales, mostraron gran dificultad para pasar enunciados de un lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático, así como para solucionar ecuaciones lineales con una variable. En una segunda sección de clase se socializó la prueba diagnóstica corroborando los resultados escritos y comenzando con unas primeras explicaciones y aclaraciones de conceptos básicos.

Teniendo en cuenta los resultados de la actividad diagnóstica, que se realizó individualmente, se planificó la organización en equipos para el desarrollo de las demás actividades de la unidad didáctica.

8.2. Construcción de Explicaciones - Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones

Todas las actividades fueron diseñadas con el propósito de que contribuyeran a cumplir los objetivos establecidos y al desarrollo de competencias propuestas. Cabe aclarar que no solo se trabajaron competencias relacionadas con procesos gráficos, también se trabajaron competencias de tipo algebraico ya que están altamente relacionadas con procesos de construcción de sistemas de ecuaciones lineales o despeje de variables que permiten después identificar los parámetros en una ecuación y graficar una recta en el plano.

Las actividades se desarrollaron durante el transcurso de toda la unidad didáctica, como estrategia de enseñanza, buscando que dichas actividades aportaran elementos conceptuales, procedimentales y de uso de nuevos recursos para la solución a problemas. Se planearon acciones en las que el docente contextualizaba las actividades, observaba y orientaba las estrategias de cada grupo, y los llevaba a planear y aplicar métodos gráficos en la solución del sistema de ecuaciones en cada tarea.

Esquema de las secciones de clase:

En la tercera sección de clase se trabajan la estructura de una ecuación de primer grado y su solución, así como el concepto de equivalencia de ecuaciones. Se da a conocer un procedimiento para resolver ecuaciones lineales con una incógnita y se hacen ejemplos.

- Paso 1. Eliminar signos de agrupación y denominadores, si los hay.
- Paso 2. Aplicar la propiedad uniforme para despejar la variable.
- Paso 3. Se reducen términos semejantes en ambos miembros de la ecuación, si los hay.

Ejemplo 8.1 A Juan le han pagado por trabajar 20 días \$720.000 y sabe que antes de pagarle, le han descontado \$80.000 de salud. ¿Cuánto ha ganado Juan por día?

Solución:

Llamemos x = la cantidad de dinero que gana Juan por día. Así tenemos que

$$\begin{aligned}20x - 80.000 &= 720.000 \\20x &= 720.000 + 80.000 \\20x &= 800.000 \\x &= \frac{800.000}{20} \\x &= 40.000\end{aligned}$$

de donde podemos concluir que Juan gana por día 40.000 pesos.

A continuación la docente distribuye por grupos la guía de estudio #1 y la actividad #1 para que los estudiantes se apropien del concepto trabajado y lo resuelvan colaborativamente (Ver anexo B y C). Al finalizar la clase se recoge la actividad que se tendrá en cuenta en el proceso evaluativo de los estudiantes.

- En la actividad #1. Se propone un primer problema donde se busca que el estudiante realice conversiones del sistema de representación verbal al sistema de representación simbólico y otras dos situaciones donde se enfatiza en la solución de ecuaciones lineales con una incógnita, resultado de una situación problema, mediante la aplicación de un procedimiento.

En la cuarta sección de clase se trabaja el concepto de una ecuación lineal con dos variables y su interpretación geométrica. (Ver anexo D)

- En la actividad #2. Se proponen 5 problemas relacionados con la vida diaria, buscando que los estudiantes propongan diferentes formas de encontrar soluciones y puedan afianzar sus conocimientos. (Ver anexo E)

En la quinta sección de clase se trabaja el concepto de sistema de ecuaciones y su solución utilizando el método gráfico. (Ver anexo F)

- En la actividad #3. Nuevamente se propone una secuencia de problemas en diferentes disciplinas buscando que el estudiante utilice métodos gráficos para

interpretar sus resultados y le de sentido a todo lo que implica trabajar con un sistema de ecuaciones lineales. (Ver anexo G).

En la sexta y séptima sección se ahonda el concepto de sistema de ecuaciones lineales, su solución y los diferentes métodos para obtenerla, retomando métodos formales.

Mediante solución de problemas se realizará la formalización de los métodos algebraicos para la construcción y resolución de sistemas de ecuaciones sin caer en la mecanización de estos procedimientos. (Ver anexos H y I). Interpretando siempre todos los parámetros que hacen parte de las ecuaciones y su solución.

- En la actividad #4. Se plantean diferentes problemas incitando a los estudiantes a solucionarlos de diferentes maneras y a discutir siempre sus soluciones e interpretaciones del enunciado, buscando entre pares la solución de dificultades y que se llegue a un mejor dominio del concepto.

En la octava sección de clase se propone un Taller con una situación problema en el campo de la economía buscando que el estudiante despierte su interés y se motive al ver contenidos matemáticos aplicados a contextos reales. (Ver anexo J)

Con el **problema 1** se buscaba que el estudiante pudiera razonar y deducir cuales son los costos explícitos en el problema y a que parámetros de la ecuación matemática corresponden. En esta parte muchos estudiantes aun no pudieron inicialmente relacionar los datos con los parámetros. Por la forma como está redactado el problema, muchos estudiantes comenzaron a hacer una tabla de valores; esto los ayudo a la construcción del gráfico; sin embargo, muchos de ellos evidenciaban desconocer el significado práctico de la ordenada al origen y de la pendiente. El trabajo en grupo permitió la reflexión conjunta hasta concluir que los únicos costos que aparecen en este problema son aquellos que dependen de la cantidad de prendas realizadas. La función lineal correspondiente resulto ser $C(x) = 20x$.

En el **problema 2** se busca introducir el concepto de función de ingresos y de una función de beneficio, con el fin de de que los estudiantes tomaran

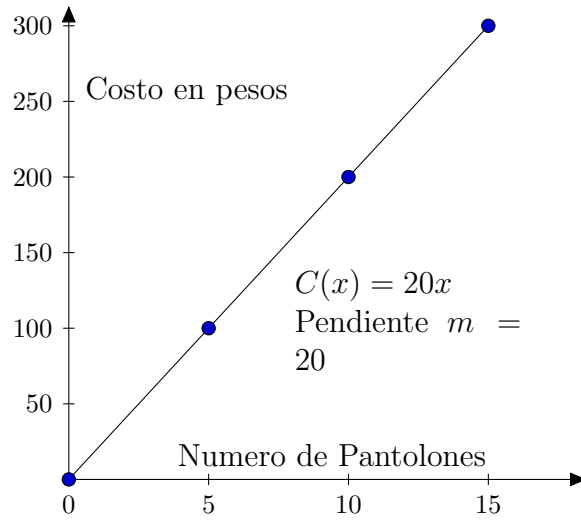


Figura 8.1: Función lineal de costos

conocimiento de estas dos nuevas funciones lineales aplicadas en economía para analizar si un negocio es económicamente beneficioso, o no.

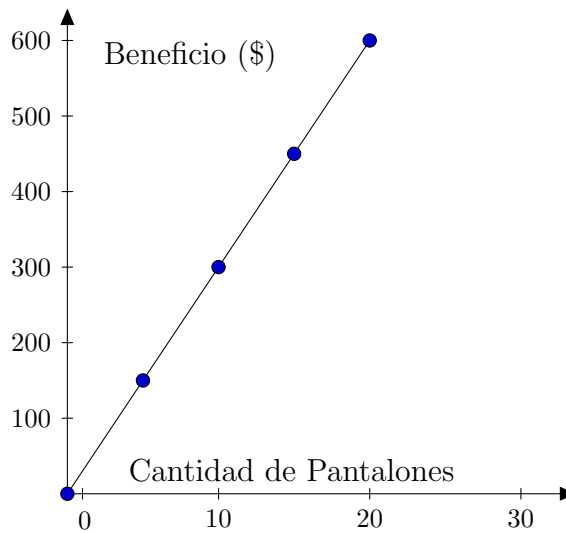


Figura 8.2: Función de beneficio

Si bien, en este caso, la respuesta se obtiene por una simple multiplicación, la intención es que los estudiantes se den cuenta que esta simple operación puede ser una función matemática cuando uno de los factores involucrados se

convierte en una variable. En esta ocasión nuevamente aparece una función con ordenada al origen de valor cero y otra función como la diferencia entre los ingresos y los costos. Con este simple problema los estudiantes resignifican permanentemente sus conocimientos sobre el tema.

En el **problema 3** se presentó la Función Demanda con el siguiente texto informativo:

La Función Demanda:

Los consumidores adquirirán diferentes cantidades de un producto por unidad de tiempo de acuerdo con diversos factores circunstanciales: la rentas o ingresos obtenido por ellos en ese período, el precio de los demás bienes y fundamentalmente, el precio del bien en cuestión. Sólo haremos referencia ahora a la variabilidad de este último aspecto. Diremos que la demanda cambiará tanto como el precio del producto lo haga.

Tal como señalan Mochón y Beker (2003): “Dado un conjunto de circunstancias del mercado, la demanda nos dará la cantidad que absorbería el mismo para cada precio”.

Al estudiar este aspecto económico se observó que existe una relación inversa por lo cual, cuanto mayor es el precio de un artículo, menor cantidad del mismo está dispuesto a comprar el consumidor y que lo contrario ocurre cuando el precio se ve reducido. Esta relación es conocida como la ley de la demanda.

Concluiremos que al realizar un gráfico los datos que resultan de esta clase de estudio, se obtiene una curva de demanda decreciente que muestra la medida en que las cantidades que serán demandadas durante un período determinado por una población específica se verán disminuidas en tanto los posibles precios aumenten.

El **problema 3**, requiere de la comprensión del texto y de la solución del problema, la mayoría de los estudiantes obtuvo una respuesta acertada a este problema.

Cuando se socializó con todos los grupos se concluyó que:

- La función Demanda siempre posee pendiente negativa.

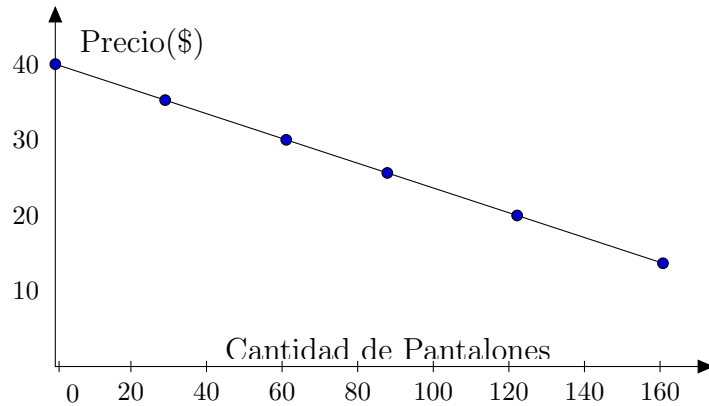


Figura 8.3: Función de demanda

- La ordenada al origen no tiene sentido económico, ya que significaría el precio de compra de ningún pantalón.
- No es conveniente prolongar la recta hasta la intersección con el eje de las abscisas, ya que ese caso sería inconsistente desde la economía pues carece de sentido hallar una cantidad de camisas para los cuales su precio fuera cero.
- Establecer el número máximo y mínimo de pantalones que serán demandados según sus criterios.

En el **problema 4** se hizo una actividad para que los estudiantes observaran la utilidad del gráfico anterior y cómo usarlo para otros valores de las variables. Fue importante que los estudiantes pudieran resolver el problema con el gráfico y también con la ecuación.

En el **problema 5** se buscaba que los estudiantes pudieran analizar distintos tipos de costos; su resolución se muestra a continuación:

Los estudiantes pudieron relacionar que los gastos fijos influyeron notablemente sobre los beneficios, dejando de ser un buen negocio para Liliana; cuando se socializó los estudiantes concluyeron:

- Una manera de disminuir los gastos totales sería controlar los gastos variables.

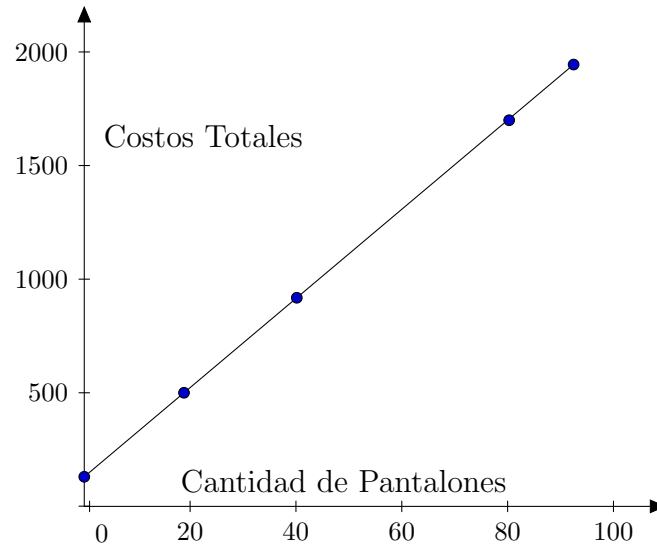


Figura 8.4: Gráfica de costos

- La función costo total está influenciada tanto por los costos fijos como por los costos variables.

En el **problema 6** se pretendía que los estudiantes comprobaran que la manera más apropiada de disminuir los costos y mejorar los beneficios era disminuyendo los costos variables.

Con el **problema 7** se pretendía que los estudiantes comprendieran la definición de la función de Oferta y se les entregó por grupos la siguiente información:

La Función Oferta

La oferta es una relación entre la cantidad ofrecida y el precio al cual dicha cantidad se ofrece al mercado. La oferta señala el comportamiento de los productores. A precios muy bajos los costos de producción no se cubren y los productores no ganarían nada; conforme los precios van aumentando se empezarán a lanzar unidades al mercado y a precios más altos, la producción será mayor.

Esta función suele tener pendiente positiva, y muestra la relación que existe entre el precio de un bien y las cantidades que un empresario desearía ofrecer de ese bien por unidad de tiempo.

De acuerdo con lo postulado por Monchón y Beker (2003), “Mientras la demanda muestra el comportamiento de los consumidores, la oferta señala el comportamiento de los productores”.

Y por último en el **problema 8** se utilizaron conceptos ya aprendidos con relación a la intersección entre dos ecuaciones lineales. La solución del problema se presenta en la figura:

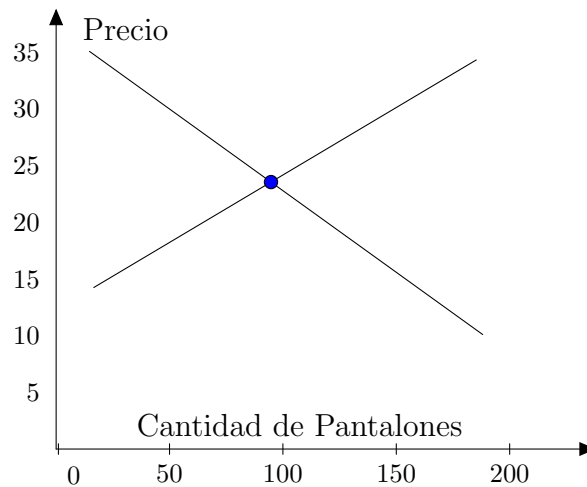


Figura 8.5: Punto de equilibrio entre la demanda y la oferta

Además se entregó un nuevo texto a los estudiantes explicando los conceptos del área de economía:

El equilibrio del mercado según Mochón y Beker (2003), “Cuando ponemos en contacto a consumidores y productores con sus respectivos planes de consumo y producción, esto es, con sus respectivas curvas de demanda y oferta en un mercado particular, podemos analizar cómo se lleva a cabo la coordinación de ambos tipos de agentes. Se observa cómo, en general, un precio arbitrario no logra que los planes de demanda y de oferta coincidan. Sólo en el punto de corte de ambas curvas se dará esta coincidencia y sólo un precio podrá producirla. A este precio lo denominaremos precio de equilibrio, y a la cantidad ofrecida y demanda, comprada y vendida a ese precio, cantidad de equilibrio. (Ver figura 8.5)

El exceso de oferta – o excedente – es entendido como la cantidad en que la

oferta es mayor que la demanda (cuando el precio es superior al de equilibrio), y el exceso de demanda – o escasez – es entendido como la magnitud en que la cantidad de demanda excede a la ofrecida cuando el precio es menor al del equilibrio; los elementos que presionan sobre el precio y lo hacen tender hacia el precio de equilibrio y, por tanto, a igualar la oferta y la demanda”

En un sentido más realista, Wales y Sanger (2001) especifican: “En el punto de equilibrio el precio es estable y la cantidad de transacciones es máxima. Si el precio se incrementara, habría un exceso de oferta, de modo que los vendedores se verían obligados a disminuir el precio para poder vender dicho exceso. Si el precio disminuye, habría un exceso de demanda, situación en la que los vendedores incrementarían el precio para aprovechar el tirón del producto”.

En la novena y última sección se realizará la actividad evaluativa de forma individual y por escrito, la cual fue programada con anticipación y se hizo entrega de un taller final para trabajar en la casa (Ver anexo H) que les permita fortalecer los conceptos para dicha evaluación permitiendo que los estudiantes expresen la comprensión de conceptos, el desarrollo de procedimientos y evidencien sus aprendizajes significativos al respecto.

8.3. Evaluación Final

Este proceso evaluativo es integral, permanente, continuo, formativo y sumativo, da cuenta del desempeño cognitivo, procedimental y actitudinal de los alumnos. Se hará con base en los trabajos realizados y entregados por los estudiantes, observaciones registradas por el docente durante el proceso incluyendo la actitud, la autoevaluación y la evaluación sumativa. Se asignará porcentajes a estos aspectos así: actividades y trabajos de los alumnos (50 %), evaluación sumativa (20 %), actitudinal (20 %) y autoevaluación (10 %). Alternativamente a los anteriores porcentajes, se dará como resultado de una evaluación integral, una valoración cualitativa: Superior, Alto, Básico o Bajo, como lo orienta el decreto 1290 del MEN y como lo ratifica el Sistema Institucional de Evaluación de nuestra Institución Educativa Marceliana Saldarriaga

Capítulo 9

Resultados y Análisis de resultados

9.1. Resultados Obtenidos

Durante el desarrollo de las actividades los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Marceliana Saldarriaga mostraron errores conceptuales importantes, obstáculos epistemológicos de los que no habían sido consistentes durante el aprendizaje de los conceptos de ecuaciones lineales en los grados anteriores. En el examen final, todos los estudiantes tuvieron un desempeño básico, con resultados mejores que el promedio de dicho curso y de años anteriores. Además sus actividades reflejan mayor autoconfianza, todos los estudiantes participaron activamente de las actividades y además todos trabajaron individualmente en la evaluación final, contrariamente a lo que ocurre diariamente que varios estudiantes entregan sin contestar.

A lo largo de las clases, el éxito de la propuesta quedó demostrado con indicadores cualitativos como el interés de los estudiantes, la capacidad de detectar sus propios errores y superarlos, y la toma de confianza a partir de una comprensión de problemas diversos en varias áreas para darle significado a la interpretación matemática y así resolver los problemas acertadamente.

La metodología didáctica para cada actividad requirió que cada estudiante resolviera individualmente los problemas o al menos lo intentara. Luego de unos minutos de trabajo individual se reunían en grupos de 3 o 4 estudiantes comparando sus

respuestas, dando cabida a explicaciones, aclaración de dudas entre pares e interpretaciones desde diferentes puntos de vista a las actividades. Finalmente se socializaba los resultados con toda el grupo mostrando diferentes formas de abordar los problemas, recreando conflictos cognitivos que surgieron individualmente, apuntando a generar un clima donde no se condenara el error y éste pudiera transformarse en error constructivo (Galagovsky, 2004). Resultó sumamente importante observar el trabajo en equipos y el aporte de cada estudiante, se trabajó como usualmente suele hacerse que es la puesta en común de cada equipo. Presentando solo la última versión de sus soluciones. La docente recupero en cada caso las alternativas de resolución y todas fueron discutidas hasta llegar al consenso de la solución final.

Capítulo 10

Conclusiones

10.1. Conclusiones

De esta propuesta se puede concluir que la ecuación lineal con dos variables no es reconocida por los estudiantes como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números. Cuando aparece este tipo de ecuaciones en el contexto de los sistemas lineales tienden a pensar que la solución es única. En cambio adaptan bien la concepción de la letra como incógnita a la resolución de sistemas.



Se propone lograr un cambio conceptual desde una metodología constructivista. Es decir, el cambio conceptual no responde a la simple sustitución de un concepto equivocado por otro correcto; sino que el papel del docente juega un papel importantísimo al situar a sus estudiantes frente a problemas para los cuales deban imaginar soluciones, discutirlos, reconocer errores o falta de conceptos para sostener el procesamiento de nueva información. El cambio conceptual se da como una evolución (Pozo, 1999), se construye sobre firmes bloques de conocimiento previamente sustentado (Galogovky, 2004a,b). Así, los conflictos cognitivos que surgen en los estudiantes no son necesariamente contradicciones; sino obstáculos epistemológicos (Astolfi, 1994) de los que toma conciencia sobre su existencia y sobre la forma de superarlos.

Una alternativa para dinamizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

escolares puede ser el enfoque de situaciones problemas, ya que los estudiantes, al incursionar en éstas, desarrollan niveles amplios de participación, ponen en juego su saber previo y reorganizan, con ayuda de sus compañeros y el docente, una red dinámica de relaciones conceptuales en función de la nueva información. Es decir, las situaciones problema se vuelven un contexto para la construcción de significados de los conceptos, en el que se recrean las actividades individual y colectiva, se autocontrolan los procesos de pensamiento matemático y se sintetizan los nuevos aprendidos.

Apéndice A

Prueba Diagnóstica

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARCELIANA SALDARRIAGA <i>Formando ciudadanos dignos en el ser, el saber y el hacer</i>	
	PRUEBA DIAGNÓSTICA	

ÁREA	MATEMÁTICAS	GRUPO		NOVENO	
DOCENTE	ADRIANA MILENA CASTAÑEDA URREGO	PERÍODO	3	AÑO	2014
ESTUDIANTE					

Propósito: Identificar los conocimientos previos que tienen los estudiantes de la IEMS del grado noveno sobre el tema de ecuaciones.

¿Cuánto sabes? Toma esta evaluación diagnóstica como un reto personal para identificar que tanto aprendiste en años anteriores. La idea es ayudar al profesor a tener una idea clara sobre lo que tú conoces de las ecuaciones. La evaluación consta de 5 preguntas para responder en 1 hora y 30 minutos.

1. Responde las siguientes preguntas.
 - a. ¿Qué es una ecuación?
 - b. ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación lineal con una incógnita?
 - c. ¿Qué significa que dos ecuaciones sean equivalentes?
 - d. ¿Cómo es la grafica de la función lineal f , definida por $f(x)=mx+b$?
 - e. ¿Qué representan los parámetros m y b en la gráfica de esta función?
 - f. ¿Cuántos puntos son suficientes para determinar una recta?

2. Dibuja dos cuadrados de lados a y b respectivamente:
 - a. Dibuja ahora un cuadrado de lado $a+b$
 - b. Encuentra el área para los tres cuadrados (el de lado a , el de lado b y el de lado $a+b$)
 - c. ¿Qué es más grande el área del cuadrado grande o la suma de las áreas de los cuadrados pequeños? ¿De cuanto es la diferencia? Explica tus respuestas

3. Completa la siguiente tabla



Lenguaje Diario	Representación Gráfica	Lenguaje algebraico
Un número		
Un número aumentado en 5		
Un número disminuido en 3		
Dos veces un número		
Un número aumentado en 10 equivalente a 17		
El doble de un número disminuido en 9 equivalente a 7		
El triplo de un número más 8 es igual a 17		
Cuatro veces un número disminuido en 5 equivale a 15		

4. Una empresa aceitera ha envasado 3000 litros de aceite en 1200 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase ha envasado?.

5. Graficar en el plano cartesiano los siguientes puntos A(1,2); B(-3,-6); C(0,5); D(4,0); E(-2,3); F(2,-3).

Apéndice B

Guía de estudio 1

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARCELIANA SALDARRIAGA <i>Formando ciudadanos dignos en el ser, el saber y el hacer</i>				
	GUIA DE ESTUDIO # 1				
ÁREA	MATEMÁTICAS	GRUPO		NOVENO	
DOCENTE	ADRIANA MILENA CASTAÑEDA URREGO	PERÍODO	3	AÑO	2014
ESTUDIANTE					

Propósito: Presentar información conceptual y procedimental detalladamente para que el estudiante pueda superar sus dificultades con el concepto de ecuación.

Lea detenidamente la siguiente información



CONCEPTO:

Una ecuación es una **igualdad** entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos y valores desconocidos, llamados variables o incógnitas relacionados mediante operaciones matemáticas.

EJEMPLOS

PRIMER MIEMBRO	=	SEGUNDO MIEMBRO
$8 + x$	=	$- 12$
115	=	$4x - 41$
$x + 124$	=	$70 - 2$
$5x + 3y - 4$	=	0
$2x + 8$	=	$3x - 12$
0	=	$3xy + 3x - 5$

Donde la letra x representa la variable o la incógnita.

En estos ejemplos se puede observar que hay una expresión escrita a la izquierda del signo igual conocida como primer miembro y hay una expresión escrita a la derecha del signo igual que recibe el nombre de segundo miembro de la igualdad.

Además en una ecuación puede haber más de una incógnita, es decir, más de un valor desconocido.

Clasificación de las ecuaciones:

Las ecuaciones se catalogan según su exponente o potencia más alto que tenga la incógnita, así:

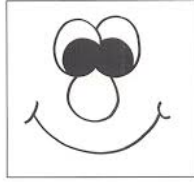
$8x + 16 = 2$	Es una ecuación de primer grado
$3x^2 + 7x - 35 = 2$	Es una ecuación de segundo grado
$4x^3 + 20x^2 - 3x + 2 = 7$	Es una ecuación de tercer grado

Lenguaje algebraico

Un número cualquiera se representa con una letra x.

Un numero aumentado en 5 unidades	$X + 5$
Un numero disminuido en 5 unidades	$X - 5$
El triple de un número	$3X$
El doble de un número, más 5 unidades	$2X + 5$
La mitad de un número	$X/2$

Si la letra "a" representa el lado de un cuadrado entonces algebraicamente tenemos que:



El perímetro del cuadrado es = $a + a + a + a = 4a$

El área del cuadrado es = $a \times a = a^2$

Analiza los siguientes ejercicios:

Verificar si la ecuación es una igualdad o no, reemplazando el valor de la variable por el valor dado.

$$2y + 7 = 5y - 2; y = 3 \quad (1)$$

Solución:

Paso 1. Reemplazar la y por 3 $2(3) + 7 = 5(3) - 2$

Paso 2. Realizar los productos o las divisiones que se encuentran en la ecuación.

$$\begin{aligned} 2(3) + 7 &= 5(3) - 2 \\ 6 + 7 &= 15 - 2 \end{aligned}$$

Paso 3. Por último sumar y/o restar los términos en cada miembro de la igualdad

$$\begin{aligned} 6 + 7 &= 15 - 2 \\ 13 &= 13 \end{aligned}$$

La ecuación (1) si es una igualdad, puesto que al reemplazar la incógnita "y" por 3 y realizar las operaciones pertinentes, en ambos lados de la igualdad se obtuvo el mismo resultado 13.

Problema de Aplicación

Una de las aplicaciones más importantes de las ecuaciones lineales de primer grado es la de resolver problemas de la vida diaria. Analicemos el siguiente ejemplo:

Tienes que repartir \$153.000 entre tres personas, de manera que la parte de la segunda sea el doble de la parte de la primera y la parte de la tercera sea el triple de la parte de la segunda. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada persona? Si se reparten todo el dinero?.

Supongamos que x = parte de dinero que le corresponde a la primera persona.

$2x$ = dinero que le corresponde a la segunda persona

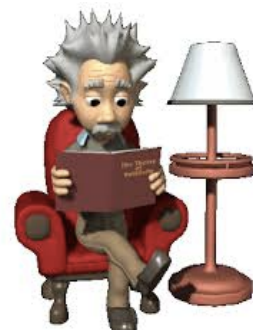
$3(2x)$ = dinero que le corresponde a la tercera persona.

Así,

$$\begin{aligned} x + 2x + 3(2x) &= 153.000 \\ 9x &= 153.000 \\ x &= \frac{153.000}{9} \\ x &= 17.000 \end{aligned}$$



Así a la primera persona le corresponde 17.000 pesos a la segunda $2(17.000)=34.000$ pesos y a la tercera $3(34.000)=102.000$.

Verificación: $17.000+34.000+102.000=153.000$



Apéndice C

Actividad 1

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARCELIANA SALDARRIAGA <i>Formando ciudadanos dignos en el ser, el saber y el hacer</i>	
	ACTIVIDAD # 1	

ÁREA	MATEMÁTICAS	GRUPO		NOVENO	
DOCENTE	ADRIANA MILENA CASTAÑEDA URREGO	PERÍODO	3	AÑO	2014
ESTUDIANTE					

Propósito: Plantear ecuaciones lineales de primer grado traduciendo del lenguaje natural al algebraico y viceversa.

A PRACTICAR, coloca a prueba lo aprendido.



1. En el siguiente cuadro encontrarás algunos enunciados en lenguaje natural para pasarlo a lenguaje algebraico.

LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE ALGEBRAICO
Un número par	
La suma de tres números consecutivos	
La mitad de un número más 2	
La tercera parte de la diferencia entre dos números	
El doble de un número aumentado en 5 equivale a 23.	

2. Verificar si las ecuaciones son una igualdad o no, cuando se reemplazan los valores que se dan.

- | | |
|------------------------|----------|
| a. $5x - 7 = 3$; | $x = 2$ |
| b. $m + 9 = 2m + 10$; | $m = -1$ |
| c. $3n - 4 = 5n + 2$; | $n = 5$ |



3. Plantear y resolver el siguiente problema.

Hace mucho tiempo cuando aun no se había creado la moneda se hacían transacciones mediante el trueque; por ejemplo, un collar y una lanza se cambiaban por un escudo, un escudo se cambiaba por un collar y un bulto de maíz, dos escudos se cambiaban por tres cuchillos y un bulto de trigo se podía cambiar por dos cuchillos un escudo y un collar.

- Identifica los datos que intervienen en la situación, representándolos con un símbolo o letra del abecedario.
 - Establece las relaciones de igualdad entre los artículos utilizando los nombres de las variables del punto anterior.
 - Establece otras equivalencias entre los artículos, escríbelos como expresiones matemáticas y asócialas un enunciado verbal.
- En el fin de semana, las atenciones de un servicio de urgencias fueron un 40% de las ocurridas en toda la semana. Si en dicho fin de semana se produjeron 240 atenciones. ¿Cuál es el balance total de atenciones?.
 - Para producir 50 mg de un medicamento en un laboratorio, se necesitan 15 mg de un compuesto A y el resto de un producto que tenemos en dosis de 5mg. ¿Cuántas dosis necesitamos para que la mezcla salga bien?.

Apéndice D

Guía de estudio 2

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARCELIANA SALDARRIAGA <i>Formando ciudadanos dignos en el ser, el saber y el hacer</i>				
	GUIA DE ESTUDIO # 2				
ÁREA	MATEMÁTICAS	GRUPO		NOVENO	
DOCENTE	ADRIANA MILENA CASTAÑEDA URREGO	PERÍODO	3	AÑO	2014
ESTUDIANTE					

Propósito: Solucionar y graficar ecuaciones lineales con dos variables.

Lea detenidamente la siguiente información

Definición: Una ecuación de la forma $ax + by = c$ donde a, b y c son constantes con a diferente de cero, o b diferente de cero, y x e y incógnitas se conoce como una ecuación lineal en dos variables de forma general.

EJEMPLOS: $-2x + 3y = 4$; $5x - 3y = -9$.

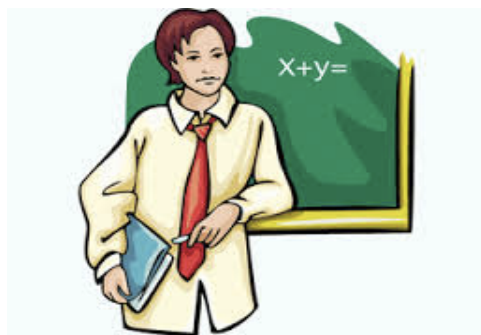
Las ecuaciones $y = -3x + 5$ y $y = -2x$ son ecuaciones lineales en dos variables pero no están expresadas de la forma general. Lo podemos lograr cambiando de lugar los términos correspondientes. De manera que:

$$y = -3x + 5 \text{ en la forma general es } 3x + y = 5$$

$$y = -2x \text{ en la forma general es } 2x + y = 0$$

El conjunto solución de una ecuación lineal en dos variables es el conjunto de pares ordenados que hace la ecuación verdadera. Por ejemplo: ¿cuál de los siguientes pares ordenados (5,1) y (8,3) es solución de la ecuación $3x - 4y = 12$? La respuesta a esta pregunta la podemos hallar sustituyendo los valores de las coordenadas x e y en la ecuación dada. Veamos:

- 1) Si $3x - 4y = 12$ entonces $3(5) - 4(1) = 15 - 4 = 11$. Por tanto, el par ordenado (5, 1) no es solución de la ecuación $3x - 4y = 12$.
- 2) Si $3x - 4y = 12$ entonces $3(8) - 4(3) = 24 - 12 = 12$. Por tanto, el par ordenado (8, 3) es solución de la ecuación $3x - 4y = 12$.



Gráfica de ecuaciones lineales en dos variables: Las gráficas de las ecuaciones lineales son líneas rectas. Una forma de construir gráfica de líneas recta es a través de interceptos.

La coordenada x del punto donde interseca la gráfica de la ecuación en el eje de x se llama intercepto en x. Para hallarlo se le asigna a y el valor de cero. El intercepto en x se expresa de la forma (x, 0).

La coordenada y del punto donde interseca la gráfica de la ecuación en el eje de y se llama intercepto en y. Para hallarlo se le asigna a x el valor de cero. El intercepto en y se expresa de la forma (0, y).

EJEMPLO:

Un comerciante va al hueco de Medellín a comprar mercancía para surtir su almacén de ropa para caballeros. Si sabe que por cada camisa le cobran \$30.000 y por cada pantalón le cobran \$40.000 ¿cuántas camisas y cuántos pantalones puede comprar con \$1'200.000?

SOLUCIÓN:

Primero debemos plantear la ecuación apropiada para resolver el problema, para esto se toma como variables o incógnitas lo que necesito saber, es decir lo que me preguntan, en este caso

x = cantidad de camisas que puede comprar.

y = cantidad de pantalones que puede comprar.

Así, tenemos que $30.000x + 40.000y = 1'200.000$ aplicando la propiedad uniforme divido ambos miembros de la igualdad por 10.000 para simplificar la ecuación:

$$\frac{30.000x + 40.000y}{10.000} = \frac{1'200.000}{10.000}$$

de donde $3x + 4y = 120$ (1); ahora despejo y de la ecuación $4y = 120 - 3x$ por lo tanto

$$y = \frac{120 - 3x}{4}$$

$$y = 30 - \frac{3}{4}x \quad (2)$$

Obtenemos una función lineal con pendiente negativa $\left(m = -\frac{3}{4}\right)$ lo que nos muestra que por cada 4 camisas se dejan de comprar 3 pantalones. (Pues si x aumenta en 4 unidades la y disminuye en 3)

Ahora para graficar la ecuación lineal debemos tener en cuenta que las variables deben ser enteros positivos pues representan las cantidades de camisas y pantalones que puedo comprar.

Primero hallamos los interceptos para esto le asignamos a la variable x el valor de cero, así,

Si $x=0$ debo encontrar cuanto vale y sustituyendo en la ecuación (2) tenemos que

$$y = 30 - \frac{3}{4}(0)$$

$$y = 30$$

Lo que me dice que si compro cero (0) camisetas puedo comprar 30 pantalones.

Ahora que pasa si no compro ningún pantalón ($y=0$), ¿Cuántas camisas puedo comprar?

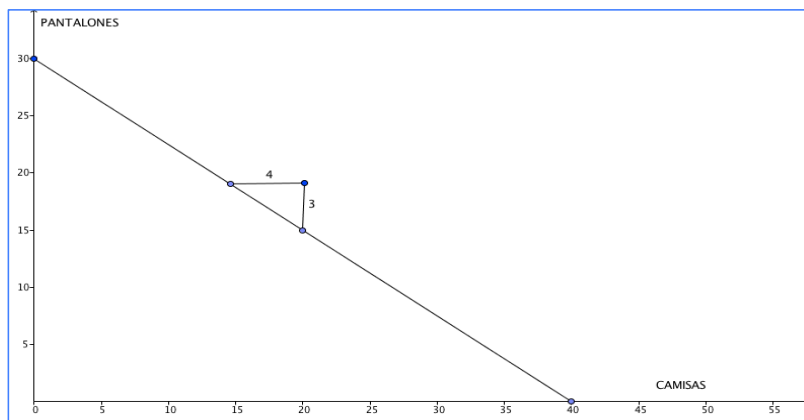
De la ecuación (1) tenemos que $3x + 4y = 120$ por tanto si reemplazo $y=0$ obtenemos

$$3x + 4(0) = 120$$

$$3x = 120$$



$$x = \frac{120}{3}$$

$$x = 40$$



Apéndice E

Actividad 2

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARCELIANA SALDARRIAGA <i>Formando ciudadanos dignos en el ser, el saber y el hacer</i>	
	ACTIVIDAD #2	

ÁREA	MATEMÁTICAS	GRUPO		NOVENO	
DOCENTE	ADRIANA MILENA CASTAÑEDA URREGO	PERÍODO	3	AÑO	2014
ESTUDIANTE					

Propósito: Plantear y resolver ecuaciones lineales con dos variables



A PRACTICAR, a continuación encontraras 5 situaciones problemas que debes ayudar a resolver, utilizando ecuaciones lineales con dos variables, realiza la grafica que corresponde a cada caso, encuentra la pendiente y los interceptos con los ejes e interpreta todos los resultados. Ánimo, mucha suerte.

“Quien vence los obstáculos logra alcanzar las metas”

1. Comenzando el año escolar tienes \$15.000 para comprar utiles escolares, si sabes que cada cuaderno de la marca A te cuesta \$3.000 y que por cada lapicero de color te cobran \$1.500. ¿Cuántos cuadernos de esta marca y cuantos lapiceros de colores puedes comprar?.
2. Si desde el mes de enero comienzas a llenar una alcancía, que romperás a fin de año para comprar regalos de navidad y el día que la abras tienes \$400.000 en monedas y vas a un banco para que te las cambien por billetes de \$50.000 y de \$20.000 ¿cuantos billetes de cada denominación debes recibir?.
3. Un fabricante de bombillas gana \$300 por cada bombilla que sale de la fábrica, pero pierde \$400 por cada una que sale defectuosa. Un día obtuvo un beneficio de \$600.000 ¿cuántas bombillas buenas y cuántas defectuosas fabricó ese día?.
4. Un grupo de amigos planean ir de excursión al mar. Llamaron a una cabaña para preguntar cuántas habitaciones hay disponibles. La persona que atiende les dice que hay disponibles 29 habitaciones, y que las habitaciones son dobles y triples. ¿Cuántas habitaciones hay de cada tipo?.
5. La tarifa de los taxis en una ciudad es de \$2.600 el banderazo y \$80 por cada 70 metros recorridos. Si llamamos x el número de metros recorridos y y el costo en pesos. Encuentre la ecuación que mejor se adapte al problema, grafique la solución e interprete.

Apéndice F

Guía de estudio 3

ÁREA	MATEMATICAS	GRUPO		NOVENO	
DOCENTE	ADRIANA MILENA CASTAÑEDA URREGO	PERÍODO	3	AÑO	2014
ESTUDIANTE					

Propósito: Comprender y desarrollar métodos matemáticos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Lea detenidamente la siguiente información

CONCEPTO:

Un Sistema de Ecuaciones Lineales es una colección de una o más ecuaciones lineales que involucran las mismas variables. Resolver el sistema es encontrar una solución.

Una solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par ordenado (x, y) que verifica las dos ecuaciones a la vez



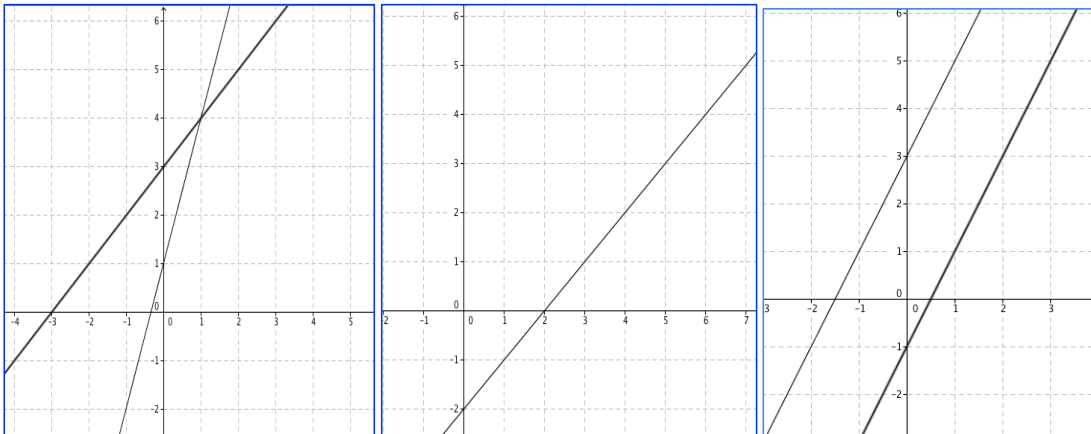
EJEMPLO:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 9 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}$$

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener infinitas soluciones, una única solución o ninguna solución.

Método Gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales:

Este método consiste en graficar las rectas que corresponden a las ecuaciones que forman el sistema, para determinar las coordenadas del punto (x, y) en el que se cortan dichas rectas.



En la Figura 1. Las rectas coinciden en todos sus puntos. Por lo tanto, el sistema tiene infinitas soluciones.

En la Figura 2. Las rectas se cortan en un solo punto (x, y). Esto significa que el sistema tiene una única solución, dada por los valores x, y que son coordenadas del punto de corte.

En la Figura 3. Las rectas son paralelas. Luego no tienen puntos en común. Es decir, el sistema no tiene solución.

Ejemplo:

- ✚ En una fábrica de zumos se mezclan dos tipos de calidades, una de 500 pesos por litro y otra de 800 pesos por litro. ¿Cuántos litros de zumo se mezclarán de cada tipo para obtener 120 litros con un costo de 75.000 pesos?

Solución:

Primero se eligen las incógnitas

$$x = \text{Litros de zumo de calidad } 500\text{p/l}$$

$$y = \text{Litros de zumo de calidad } 800\text{p/l}$$

Luego planteamos la primera ecuación para los litros de zumo $x + y = 120$

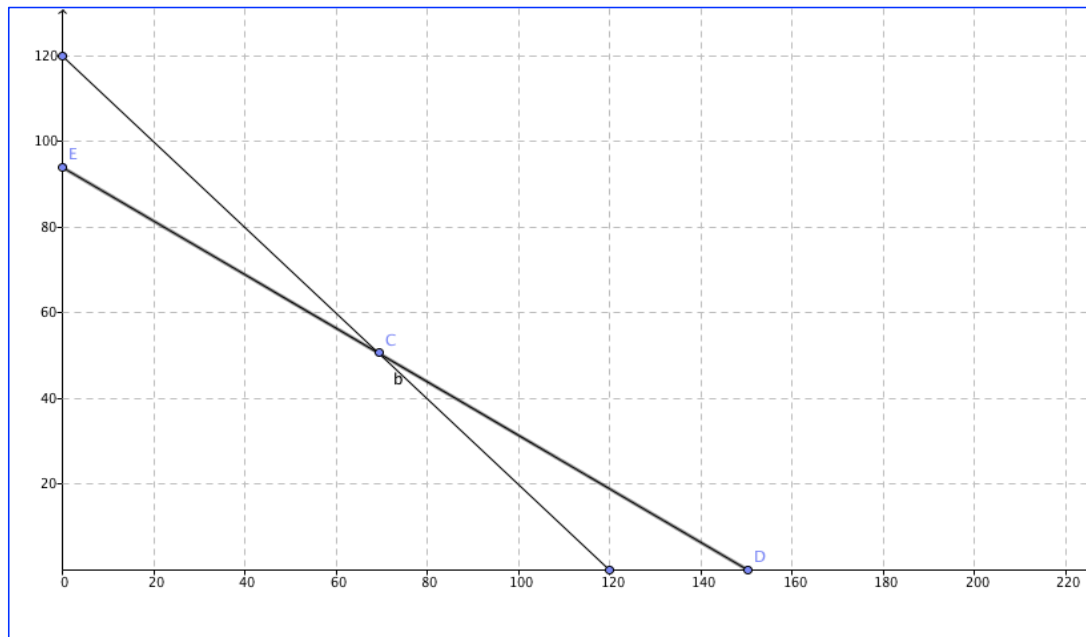
Ahora como la mezcla debe tener un costo de \$75.000 tenemos, la segunda ecuación $500x + 800y = 75.000$, Así el sistema que debemos resolver es

$$\begin{aligned} x + y &= 120 \\ 500x + 800y &= 75.000 \end{aligned}$$

Para simplificar la ecuación (2) divido a ambos lados de la igualdad por 100, para obtener

$$5x + 8y = 750.$$

Graficando obtenemos:



Donde podemos evidenciar que el sistema tiene una única solución y es la pareja ordenada (70 , 50) de donde se concluye que se necesitan 70 litros de zumo de un tipo y 50 litros del segundo tipo para obtener una mezcla de 120 litros con un costo de \$ 75.000.

Recordemos

Para graficar las ecuaciones se debe realizar una tabla de valores donde debemos tener en cuenta las condiciones del problema, en este caso los valores de x deben ser enteros positivos pues estamos hablando de litros.

Además si despejamos la variable y de ambas ecuaciones obtenemos dos funciones lineales con pendiente negativa, por lo tanto ambas líneas rectas decrecen

$$y = 120 - x$$

$$y = (750 - 5x) / 8$$

Tabla de valores para la primera ecuación:

x	0	10	20	30	40	50	60	70
y	120	110	100	90	80	70	60	50

Además se debe encontrar el punto de corte o intercepto de ambas rectas, para esto se deben igualar estas dos ecuaciones, así:

$$120 - x = \frac{750 - 5x}{8}$$

$$120 - x = \frac{750}{8} - \frac{5}{8}x$$

$$120 - \frac{750}{8} = x - \frac{5}{8}x$$

$$\frac{210}{8} = \frac{3}{8}x$$

$$\frac{210}{3} = x$$

$$70 = x$$

ahora de la ecuación (1) tenemos que $y = 120 - x$ de donde $y = 120 - 70 = 50$



Comprobemos que el par ordenado (70, 50) es solución al sistema de ecuaciones 2x2. Para esto solo reemplazamos estos valores en el sistema de ecuaciones, así:

$$70 + 50 = 120$$

$$5(70) + 8(50) = 350 + 400 = 750$$

Apéndice G

Actividad 3

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARCELIANA SALDARRIAGA <i>Formando ciudadanos dignos en el ser, el saber y el hacer</i>	
	ACTIVIDAD # 3	

ÁREA	MATEMATICAS	GRUPO		NOVENO	
DOCENTE	ADRIANA MILENA CASTAÑEDA URREGO	PERÍODO	3	AÑO	2014
ESTUDIANTE					

Propósito: Aplicar el método gráfico para obtener la solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

A PRACTICAR, Coloca a prueba lo aprendido.

1. Represente cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones en un plano cartesiano y responda las preguntas:

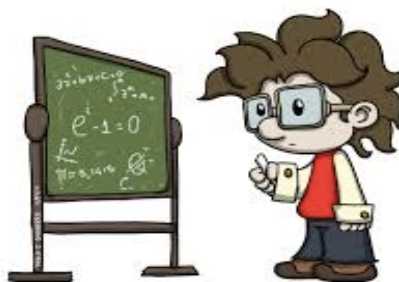
Sistema A $y = x - 1$
 $y = -x - 3$

Sistema B $y = 3x + 1$
 $y = x/2 - 3/2$

Sistema C $3y = x - 5$
 $y = x - 3$

- a. ¿Qué puede decirse acerca de las gráficas de cada sistema? ¿Cuál es la coordenada del punto donde se intersecan las rectas?. Interprete.

- b. ¿Los sistemas A y B son equivalentes?, ¿porqué? ¿qué se debe modificar en la ecuación y gráfica del sistema C para que los tres sean equivalentes?



2. Utiliza el método grafico para solucionar las siguientes situaciones problemas de la vida diaria. Tómalo como un reto personal y práctica todo lo visto en la clase.

- a. Un fabricante de bombillas para navidad gana \$300 por cada bombilla que sale de la fábrica y pierde \$400 por cada una de las que sale defectuosa. Un día en el que fabricó 2.000 bombillas obtuvo un beneficio de \$600.000. ¿Cuántas bombillas buenas y cuántas defectuosas fabricó ese día?
- b. La montaña más alta de todas es el monte Everest en la cordillera del Himalaya. El aire en la cima del Everest, tiene una densidad tres veces inferior que a nivel del mar. Si la suma de las alturas del monte Everest y el volcán Kilimanjaro equivale a 14.744metros y la altura del monte Everest es 3/2 de la altura del Kilimanjaro aumentado en 4 metros. Encontrar las alturas en metros del monte Everest y el volcán Kilimanjaro.
- c. Una tabla de la marca A, además de otras sustancias, contiene 10mg de hierro y 20 unidades de cierta proteína. Otra tableta, de la marca B, contiene 35mg de hierro y 50 unidades de la misma proteína (además de otras sustancias). Cuántas pastillas diarias de cada marca tendrá que ingerir un paciente al que se le recetó el consumo de 100mg de hierro y 160 unidades de esa proteína diariamente?.

Apéndice H

Guía de estudio 4



ÁREA	MATEMÁTICAS	GRUPO		NOVENO	
DOCENTE	ADRIANA MILENA CASTAÑEDA URREGO	PERÍODO	3	AÑO	2014
ESTUDIANTE					

Propósito: Comprender y desarrollar métodos matemáticos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Solucionar sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

Lea detenidamente la siguiente información



Cada una de las ecuaciones que forman un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es una función de primer grado, es decir, una recta.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 40 \\ -3x + 6y &= 240 \end{aligned}$$

Recordemos como se grafican una línea recta en el plano cartesiano:

Paso 1. Se despeja la incógnita y de la ecuación:

Despejar una incógnita es dejarla sola a un lado de la igualdad, para esto se utiliza la propiedad uniforme de los números reales, donde se puede sumar, restar, multiplicar o dividir por el mismo número a ambos miembros de la igualdad, Así:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 40 \\ 3x - 3x + 2y &= 40 - 3x \\ 2y &= 40 - 3x \\ y &= 20 - \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

De la nueva ecuación $y = 20 - \frac{3}{2}x$ se puede decir que como la pendiente $m = -\frac{3}{2}$, es negativa la grafica es una línea recta decreciente, además que por cada 2 unidades que me mueva horizontalmente, me desplazo 3 unidades en el eje y hacia abajo.

Paso 2. Se encuentran los interceptos con los ejes.

Con el eje x , hacemos $y = 0$, así en la ultima ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= 20 - \frac{3}{2}x \\ -20 &= -\frac{3}{2}x \\ \frac{20 \times 2}{3} &= x \end{aligned}$$

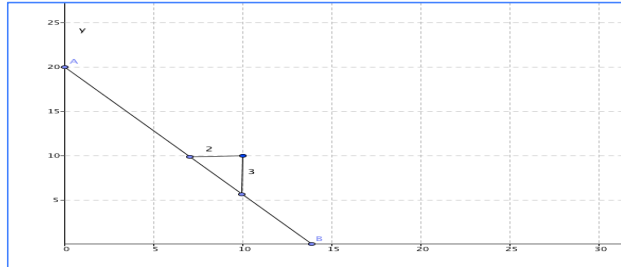
$$\frac{40}{3} = x \quad \left(\frac{40}{3}, 0\right)$$

Con el eje y, hacemos $x = 0$

$$y = 20 - \frac{3}{2}(0)$$

$$y = 20 \quad (0, 20)$$

Paso 3. Se construye la funciones lineal de primer grado en el plano cartesiano (se realiza la tabla de valores correspondiente, si es necesario de acuerdo con las condiciones del problema).



Ejemplo: Alejandro tiene \$120.000 en 33 billetes de \$5.000 y \$2.000. ¿Cuántos billetes de cada denominación tiene? Grafique e interprete su respuesta.

Solución:

Llamemos X = cantidad de billetes de \$5.000
 Y = cantidad de billetes de \$2.000

Así, $120.000 = 5.000x + 2.000y$ Simplificando obtenemos

$$120 = 5x + 2y$$

$$x + y = 33$$

Despejo y de ambas ecuaciones

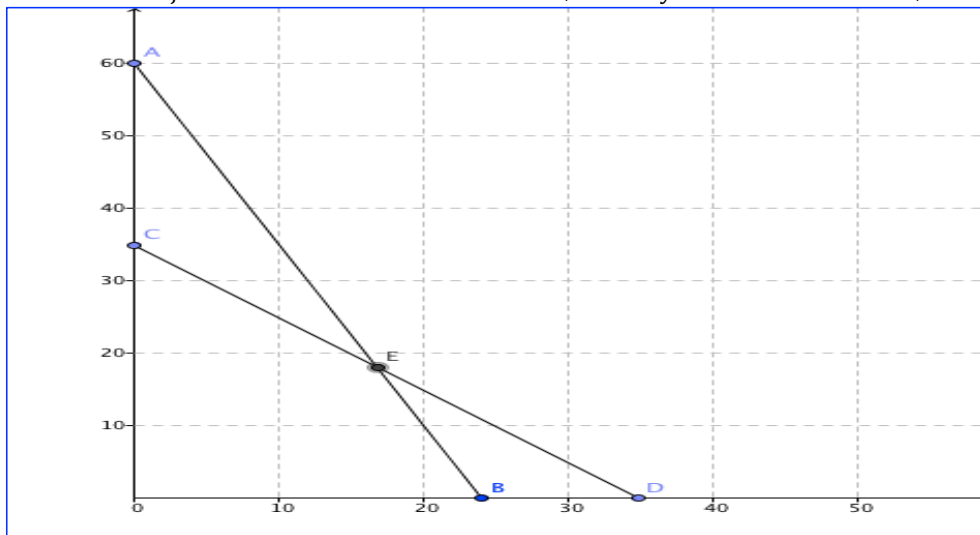
$$60 - \frac{5}{2}x = y$$

$$33 - x = y$$

Grafico y busco el punto de corte igualando las dos ecuaciones $33 - x = 60 - \frac{5}{2}x$; de donde



$-x + \frac{5}{2}x = 60 - 33$, así $\frac{3}{2}x = 27$, por lo tanto $x = 18$. De donde la solución es $(18, 15)$

Es decir Alejandro tiene 18 billetes de \$5.000 y 15 billetes de \$2.000



Apéndice I

Actividad 4

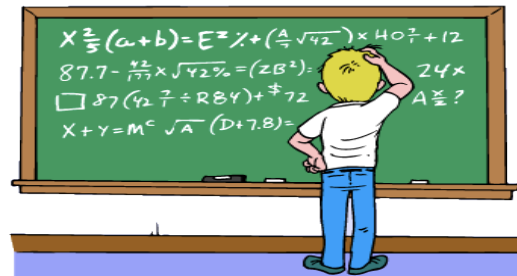
	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARCELIANA SALDARRIAGA <i>Formando ciudadanos dignos en el ser, el saber y el hacer</i>	
	ACTIVIDAD # 4	

ÁREA	MATEMÁTICAS	GRUPO		NOVENO	
DOCENTE	ADRIANA MILENA CASTAÑEDA URREGO	PERÍODO	3	AÑO	2014
ESTUDIANTE					

Propósito: Solucionar sistemas de ecuaciones utilizando diferentes métodos.

A continuación encontraras 5 problemas para los cuales debes:


Plantar el sistema de ecuaciones correspondiente en cada caso, solucionar dicho sistema, graficar e interpretar los resultados.



1. Se sabe que entre los dos partidos políticos mayoritarios suman 269 diputados, y a uno de ellos le faltan 40 para tener el doble que el otro. ¿Cuántos diputados tienen cada partido?
2. La semana pasada Antonio y Sergio ganaron entre los dos \$850.000 trabajando 40 y 30 horas respectivamente, y la anterior ganaron \$900.000 trabajando 30 y 40 horas respectivamente. ¿Cuánto ganan a la hora Antonio y Sergio?
3. Un astrónomo ha calculado que en una galaxia cercana hay el triple de planetas que en la nuestra y se sabe que entre las dos suman 800.000 millones ¿Cuántos planetas tiene nuestra galaxia? Expresa el resultado en miles de millones.
4. Antonio quiere hacerse socio de un gimnasio y estudia dos ofertas, en el gimnasio A tiene que pagar \$5.000 por hacerse el carnet y \$200.000 por cada mes, por otro lado, en el gimnasio B paga \$50.000 por el carnet y cada mes le cuesta \$150.000 ¿A qué gimnasio se debe afiliar Antonio?

Apéndice J

Taller de Aplicación

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARCELIANA SALDARRIAGA <i>Formando ciudadanos dignos en el ser, el saber y el hacer</i>	
	TALLER DE APLICACIÓN A LA ECÓNOMIA	

ÁREA	MATEMÁTICAS	GRUPO		NOVENO	
DOCENTE	ADRIANA MILENA CASTAÑEDA URREGO	PERÍODO	3	AÑO	2014
ESTUDIANTE					

Propósito: Evaluar el concepto de Ecuaciones lineales y su solución en Contexto

Problema 1

Liliana decide coser camisas en su casa. Si la tela necesaria para cada una tiene un costo de \$18.000 y sus apliques de \$2.000. ¿Cuál será el costo para fabricar 1, 6 o 12 camisas?

- Representar en un gráfico de costos contra números de camisas fabricados.
- Hallar la fórmula algebraica de la función de costos, que denominaremos $C(x) = mx + b$
- Identificar la intercepción con los ejes y la pendiente.

Problema 2.

Liliana vende mensualmente 10 camisas a \$50.000 cada una.

- Cuál es su ingreso mensual, representado algebraicamente como $I(x)$, sabiendo que $I(x)=qx$ donde q es el precio por unidad.
- Analizar el intercepto con los ejes y la pendiente de esta nueva función.
- Hallar la función Beneficio, denominada $B(x)$, sabiendo que se obtiene calculando la diferencia entre los ingresos y los costos $[I(x) - C(x)]$. Graficarla, hallar los interceptos con los ejes y la pendiente.
- Calcular los beneficios en un mes.

Problema 3.

Después de dos meses de trabajo, Liliana hace un estudio de mercado.

Los consumidores estarían dispuestos a comprar más cantidad si disminuye el precio del artículo que ella fabrica. Si el precio es de \$35.000 puede vender 30 camisas mensualmente, pero si lo vende a \$30.000 podría vender 60 pantalones. Es decir a medida que disminuye el precio, podría aumentar la demanda siguiendo un comportamiento lineal.

- Realizar un gráfico de la función Demanda, denominada $D(X)$; es decir, de precio en función del número de camisas vendidos.
- Identifique la pendiente y el intercepto con el eje y ¿tiene sentido este punto? ¿Por qué?
- Hallar la expresión algebraica correspondiente a dicha función.

Problema 4.

Según la tendencia mostrada en la función Demanda, un cliente estaría dispuesto a comprar 100 camisas por mes. En este caso, ¿a qué precio debería Liliana vender sus camisas?

Problema 5.

Suponiendo que se cumple la función Demanda, hallar los ingresos y ganancias para 100 camisas, considerando que tiene un gasto adicional de luz de \$50.000, mantenimiento de la máquina de coser \$20.000 y un ayudante que mensualmente recibe \$200.000.

- ¿Cuáles de los gráficos analizados cambiaría (el de costos o el de Demanda)?
- Defina la nueva función de costo total.
- Justifique si considera que Liliana todavía está haciendo un buen negocio hallando la función de ingresos. Grafíquela.
- En caso negativo: ¿cómo solucionaría el problema?

Problema 6.

Liliana evaluó la situación y decidió que debía intentar disminuir sus costos. Luego de analizar la situación se dio cuenta de que comprando a mayoristas lograba un 25% de descuento en las telas y en artículos de apliques.

- a. ¿Cuáles serían sus costos totales, ingresos y ganancias, considerando que efectivamente vende las 90 camisas al mes?
- b. ¿Le sugieres que es un buen negocio?, ¿Qué consideraciones financieras debería hacer?
- c. Analiza el nuevo gráfico de costos totales vs número de camisas. ¿Qué diferencia presenta con respecto a los gráficos anteriores?. Identifica la pendiente y el intercepto con el eje y.

Problema 7.

Liliana realizó un estudio de mercadeo, y observó que los precios que pagan los consumidores varían según los meses del año. Es decir, encontraron que en verano difícilmente el público compra camisas que cuestan más de \$25.000; en cambio, en invierno, están dispuestos a pagar hasta \$30.000.

Con estos datos realizaron el siguiente gráfico, pensando en la cantidad de camisas que ellas estarían dispuestas a producir, según el precio que se pague por ellas en cada época. Este gráfico se denomina función oferta.

Problema 8.



Liliana decide representar en un mismo gráfico la función Demanda y la función Oferta, obteniendo el siguiente gráfico.

Observo que en un punto ambas líneas se cruzan. Viendo este tipo de análisis vieron la necesidad de contratar un economista para mejorar su empresa, el economista le explicó que el punto de intersección se denomina "punto de equilibrio", y a partir de él se podía sacar varias conclusiones:

- a. Determinar la cantidad y el precio correspondiente al punto de equilibrio.
- b. Discutir que sucede cuando el precio es superior, o bien cuando es inferior al precio de equilibrio.

Apéndice K

Taller de Repaso

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARCELIANA SALDARRIAGA <i>Formando ciudadanos dignos en el ser, el saber y el hacer</i>	
	TALLER FINAL	

ÁREA	MATEMÁTICAS	GRUPO		NOVENO	
DOCENTE	ADRIANA MILENA CASTAÑEDA URREGO	PERÍODO	3	AÑO	2014
ESTUDIANTE					



Propósito: Evaluar lo aprendido sobre el tema

Plantea y resuelve cada uno de las siguientes situaciones utilizando el método que te parezca más conveniente. Grafique si es posible e interprete sus resultados.

1. En cierta Comuna de Medellín el cargo fijo mensual por el uso del acueducto es de \$6.000 y adicionalmente se cobra \$2.000 por cada metro cubico que se consume. ¿Cuántos metros cúbicos se podrán consumir para que la tarifa mensual no sobrepase los \$48.000?.
2. A Juan le han pagado por trabajar 20 días \$720.000 y sabe que antes de pagarle, le han descontado \$80.000 por salud. ¿Cuánto ha ganado Juan por día?.
3. En el fin de semana, las atenciones de un servicio de urgencias fueron un 40% de las ocurridas en toda la semana. Si en dicho fin de semana se produjeron 240 atenciones. ¿Cuál es el balance total de atenciones?.
4. Para producir 50 mg de un medicamento en un laboratorio, se necesitan 15 mg de un compuesto A y el resto de un producto que tenemos en dosis de 5mg. ¿Cuántas dosis necesitamos para que la mezcla salga bien?.
5. Lorena vende galletas en su colegio. Si el día de ayer vendió 36 galletas las cuales tienen un costo de \$200 y \$500 ¿Cuántas galletas vendió de cada tipo, si en total recogió \$24000?.
6. Un ciclista sube un puerto y, después, desciende por el mismo camino. Sabiendo que en la subida ha tardado 23 minutos más que en la bajada y que la duración total del recorrido ha sido de 87 minutos. ¿Cuánto ha tardado en subir y en bajar?.
7. Comprando dos kilos de naranjas más uno de uvas he gastado lo mismo que ayer al comprar un kilo de naranjas más un melón. Si las uvas valen \$1.000 el kilo y el melón \$1.500 cada uno ¿Cuánto vale el kilo de naranjas?.
8. Un joyero fabrica un total de 16 anillos, unos de oro y otros de plata. Si vende 3 anillos de cada metal precioso, le queda un número de anillos tal que el número de los de plata es el cuádruple de los de oro. ¿Cuántos anillos de oro y plata tenía el joyero?.

Apéndice L

Evaluación

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARCELIANA SALDARRIAGA <i>Formando ciudadanos dignos en el ser, el saber y el hacer</i>	
	PRUEBA DE PERÍODO	

ÁREA	MATEMÁTICAS	GRUPO		NOVENO	
DOCENTE	ADRIANA MILENA CASTAÑEDA URREGO	PERÍODO	3	AÑO	2014
ESTUDIANTE					

La evaluación costa de 6 puntos que debes resolver en 2 horas, cada punto tiene el mismo valor, recuerda realizar todas las justificaciones necesarias, respuesta sin justificación no será evaluada.

1. En la siguiente tabla encontrarás algunos enunciados en un lenguaje cotidiano que debes pasar a un lenguaje algebraico.

Lenguaje Cotidiano	Lenguaje Algebraico
Número de ruedas necesarias para fabricar x carros	
Número de patas de un corral de x gallinas.	
Número de días en x semanas	

2. Por una autopista van dos automóviles que describen una trayectoria dada por las ecuaciones $2x + y = 9$; $-x + 3y = 13$. El punto de encuentro de los dos autos es:

- A. (2, 5)
- B. (2, -5)
- C. (-2, 5)
- D. (5, 2)

3. Completa la tabla con las posibles soluciones al problema:
Comenzando el año escolar tienes \$15.000 para comprar útiles escolares, si sabes que cada cuaderno de la marca A te cuesta \$3.000 y que por cada lapicero de color te cobran \$1.500. ¿Cuántos cuadernos de esta marca y cuantos lapiceros de colores puedes comprar?. Grafique e interprete las posibles soluciones.

Suponga x = cantidad de cuadernos
 y = cantidad de lapiceros

Por lo tanto la ecuación que debemos solucionar es $3.000x + 1.500y = 15.000$

x	0	1	2	3	4	5
y		8		4		

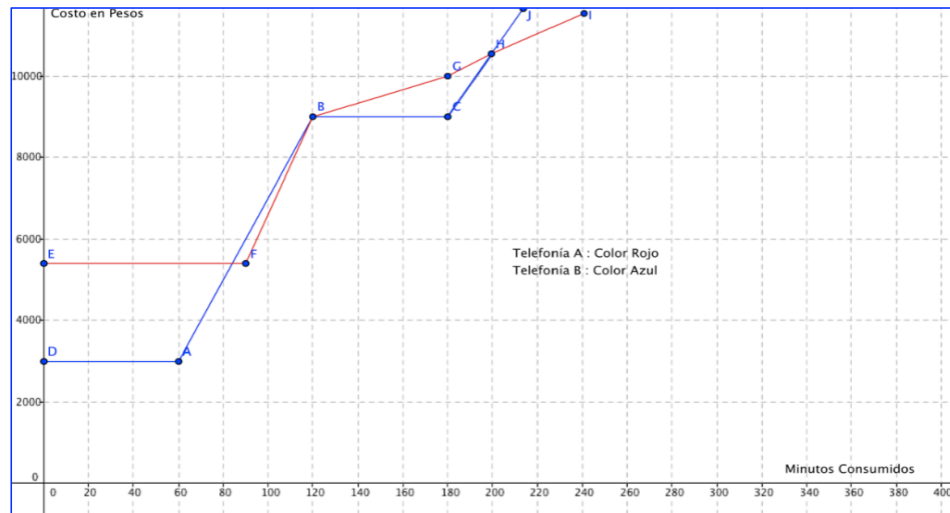
4. Responda las siguientes preguntas de acuerdo al problema:

Lorena vende galletas en su colegio. Si el día de ayer vendió 60 galletas las cuales tienen un costo de \$200 y \$500 ¿Cuántas galletas vendió de cada tipo, si en total recogió \$24000?

- a) Las variables que intervienen en el problema son: _____
- b) Qué datos desconoces en el problema: _____
- c) Qué datos conoces del problema: _____
- d) Cómo resolverías el problema:

5. Plantea y resuelve cada uno de las siguientes situaciones

- En cierta Comuna de Medellín el cargo fijo mensual por el uso del acueducto es de \$6.000 y adicionalmente se cobra \$2.000 por cada metro cubico que se consume. ¿Cuántos metros cúbicos se podrán consumir para que la tarifa mensual no sobrepase los \$48.000?
 - Para producir 50 mg de un medicamento en un laboratorio, se necesitan 15 mg de un compuesto A y el resto de un producto que tenemos en dosis de 5mg. ¿Cuántas dosis necesitamos para que la mezcla salga bien?
6. A continuación se dan las gráficas de la tarifa de dos telefonías fijas de acuerdo con los minutos consumidos al mes.



De acuerdo a la gráfica responda

- ¿Si una persona consume al mes entre 90 y 120 minutos cuál telefonía le conviene más?.
- ¿Cuál telefonía es más conveniente si se consume máximo hasta 1 hora?.
- ¿En que momento los costos de las telefonía son los mismos?.
- ¿Si se consume mas de 200 minutos mensuales, cuál es la telefonía más económica?.
- ¿Después de consumir más de 200 minutos, cuantos pesos aumenta el costo de cada minuto en cada una de las telefonías?.

Bibliografía

- [Alcocer, 2007] Alcocer, I. (2007). Dificultades en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en contextos algebraicos y geométrico. Master's thesis, Cinvestav-IPN. México.
- [Ausubel et al., 1983] Ausubel, D. P., Novak, J., & Hanesian, H. (p.1-30. 1983.). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- [Brousseau, 2007] Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Editorial libros del zorzal.
- [Cutz, 2005] Cutz, B. (2005). Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución. Master's thesis, Cinvestav-IPN. México.
- [DeVries & Arnon, 2004] DeVries & Arnon (2004). Solution-what does it mean? helping linear algebra students develop the concept while improving research tools. In *Proceedings of the 28th. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 55-62*.
- [Eslava & Villegas, 1998] Eslava, M. & Villegas, M. (1998). Análisis de los modos de pensar sintético y analítico en la representación de las categorías de tres rectas en el plano. Master's thesis, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.
- [Filloy et al., 2003] Filloy, E., Rojano, T., & Solares, A. (2003). Two meanings of the "equal" sign and senses of comparison and substitution methods. In *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 223-229*.

- [Godino, 1991] Godino (1991). *Didáctica de las matemáticas*.
- [Gowin, 1981] Gowin, D. (1981). *Educating*. Ithaca, New York: Cornell University Press.
- [Hoyos, 1998] Hoyos, V. (1998). Revisitando La Construcción De Significado en torno de las Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas: Observaciones Empíricas con Estudiantes de 16–18 Años de Edad. *Investigaciones en Matemática Educativa II, Edición del 35 Aniversario del CINVESTAV*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- [Manzanero, 2007] Manzanero, L. (2007). Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una perspectiva desde la Teoría APOE. Master's thesis, CINVESTAV–IPN. México.
- [Mendoza, 1987] Mendoza, F. R. (1987). *Un modelo pedagógico para la enseñanza de los números enteros y resoluciones de ecuación algebraicas de primer grado*. Acción pedagógica. Universidad de los Andes.
- [Ministerio de Educación Nacional – MEN, 1998] Ministerio de Educación Nacional – MEN (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- [Mora, 2001] Mora, B. (2001). Modos de pensamiento en la interpretación de la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Master's thesis, Cinvestav.IPN. México.
- [Moreira, 2000] Moreira (2000). *Aprendizaje significativo: Teoría y práctica*. Aprendizaje Visor.
- [Novak, 1977] Novak, J. (1977). *Una teoría de la educación*. Ithaca, New York: Cornell University Press.
- [Panizza et al., 1999] Panizza, M., Sadovsky, P., & Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las ciencias*, 17(7), 453–461.
- [Ramirez, 2005] Ramirez, C. (2005). Dificultades que presentan los estudiantes en los sistemas de ecuaciones lineales en los modos geométricos y analítico. Master's thesis, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

- [Sierpiska, 2000] Sierpiska, A. (2000). *On some aspects of student's thinking in linear algebra*. Kluwer Academic Publishers.